Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.24 Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \cos x - x + 1$ auf Nullstellen, lokale Extremwerte, Wendepunkte, Verhalten in $\pm\infty$. **12/7/25/1**
Skizzieren Sie die durch $f(x)$ definierte Kurve.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.24 f besitzt genau eine Nullstelle, und zwar in dem Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$. **12/7/25/2**

Die kritischen Stellen sind für $k \in \mathbb{Z}$ durch $x_k = (\frac{3}{2} + 2k)\pi$ gegeben.

f besitzt keine lokalen Extrema, aber an den Stellen x_k Wendepunkte mit $f(x_k) = -x_k + 1$.

Es ist $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

Lösung zu Aufgabe 7.24 Wir untersuchen zunächst das Nullstellenverhalten der Funktion. **12/7/25/3**

Für $x < 0$ ist $-x + 1 > 1$ und daher $f(x) \neq 0$. Für $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ist $\cos x < 0$ und somit $\cos x - x < 1$, also $f(x) \neq 0$. Für $x > \frac{3\pi}{2}$ ist $f(x) < 0$. Es bleibt das Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ zu betrachten.

Wegen $f(0) = 2$ und $f(\frac{\pi}{2}) < 0$ besitzt f als stetige Funktion nach dem Zwischenwertsatz in $(0, \frac{\pi}{2})$ eine Nullstelle. Da $\sin x > 0$ für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ (vgl. 5/3/53) und $f'(x) = -\sin x - 1 < 0$ für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, ist f in $(0, \frac{\pi}{2})$ streng monoton fallend.

Somit besitzt f in diesem Intervall genau eine Nullstelle (die bei Bedarf näherungsweise berechnet werden müßte).

Zur Bestimmung der Extrem- und Wendepunkte betrachten wir Ableitungen von f.

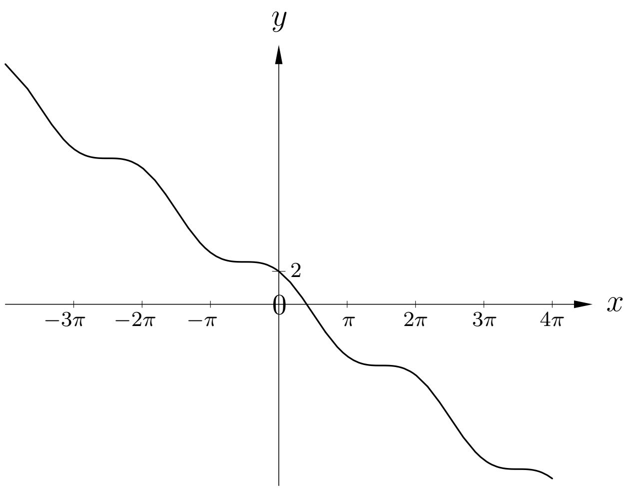
$$f'(x) = -\sin x - 1 = 0 \iff \sin x = -1 \iff x = (\tfrac{3}{2} + 2k)\pi \text{ für } k \in \mathbb{Z}.$$

Die kritischen Stellen sind gegeben durch $x_k = (\frac{3}{2} + 2k)\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Weiterhin ist

$$f''(x_k) = -\cos x_k = 0 \text{ und } f'''(x_k) = \sin x_k = -1 \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Folglich besitzt f keine lokalen Extrema, aber Wendepunkte an den Stellen x_k für $k \in \mathbb{Z}$ mit $f(x_k) = -x_k + 1$.

Offenbar gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.



Die Funktion $f(x) = \cos x - x + 1$ ist streng monoton wachsend in $\mathbb{R}$; sie besitzt eine Nullstelle in dem Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$. f hat keine lokalen Extrema, jedoch für jedes $k \in \mathbb{Z}$ an der Stelle $x = (k + \frac{3}{2})\pi$ einen Wendepunkt.