

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.25 Führen Sie für folgende Funktionen eine Kurvendiskussion durch:

12/7/26/1

- (a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$,
 (b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Lösung zu Aufgabe 7.25

12/7/26/3

- (a) (i) Definitionsbereich, Nullstellen
 Offenbar ist $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und $f(x) = 0 \iff x = 0$.
- (ii) Monotonie
 Es ist $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$. Wegen $f'(x) > 0$ für alle $x \in D(f)$ ist f in $(-\infty, -1)$ und in $(-1, \infty)$ streng monoton wachsend.
- (iii) Konvexität
 Es ist $f''(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$. Für $x < -1$ ist $f''(x) > 0$, und für $x > -1$ ist $f''(x) < 0$. Folglich ist f in $(-\infty, -1)$ streng konvex von unten und in $(-1, \infty)$ streng konvex von oben.
- (iv) Lokale Extrema, Wendepunkte
 Da f' und f'' keine Nullstellen haben, besitzt f kein lokales Extremum und keinen Wendepunkt.
- (v) Unendlichkeitsstellen
 f besitzt für $x = -1$ eine Unendlichkeitsstelle.
 Es ist $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \infty$ und $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$.
- (vi) Verhalten im Unendlichen
 Offenbar ist $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.
- (b) (i) Definitionsbereich, Nullstellen
 Es ist $D(f) = \mathbb{R}$ und $f(x) = 0 \iff x = 0$.
- (ii) Monotonie
 Es ist $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Wegen $f'(x) < 0$ für $x < 0$ und $f'(x) > 0$ für $x > 0$ ist f in $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend und in $[0, \infty)$ streng monoton wachsend.
- (iii) Konvexität
 Es ist $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$. Für $x < -1$ ist $f''(x) < 0$, für $-1 < x < 1$ ist $f''(x) > 0$ und für $x > 1$ ist $f''(x) < 0$. Folglich ist f in $(-\infty, -1]$ und in $[1, \infty)$ streng konvex von oben und in $[-1, 1]$ streng konvex von unten.

(iv) Lokale Extrema

$x = 0$ ist die einzige kritische Stelle. Wegen $f''(0) > 0$ besitzt f an dieser Stelle ein lokales Minimum der Größe $f(0) = 0$.

(v) Wendepunkte

Es ist $f'''(x) = \frac{4x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$.

Wegen $f'''(x) = 0 \iff x = \pm 1$ und $f''(\pm 1) \neq 0$ besitzt f an den Stellen $x = \pm 1$ Wendepunkte mit den Koordinaten $(-1, \ln 2)$ bzw. $(1, \ln 2)$.

(vi) Verhalten im Unendlichen

Es ist $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.