Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.25 Führen Sie für folgende Funktionen eine Kurvendiskussion durch: **12/7/26/1**

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$,

(b) $f(x) = \ln(x^2+1)$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.25 (a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und $f(x) = 0 \iff x = 0$. **12/7/26/2**

f ist in $(-\infty, -1)$ und in $(-1, \infty)$ streng monoton wachsend.

f ist in $(-\infty, -1)$ streng konvex von unten und in $(-1, \infty)$ streng konvex von oben.

f besitzt kein lokales Extremum und keinen Wendepunkt.

f besitzt in $x = -1$ eine Unendlichkeitsstelle.

Es ist $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty$.

Weiterhin ist $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$.

(b) $D(f) = \mathbb{R}$ und $f(x) = 0 \iff x = 0$.

f ist in $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend und in $[0, \infty)$ streng monoton wachsend.

f ist in $(-\infty, -1]$ und in $[-1, \infty)$ streng konvex von oben und in $[-1, 1]$ streng konvex von unten.

$x = 0$ ist die einzige kritische Stelle; f besitzt dort ein lokales Minimum der Größe $f(0) = 0$.

f besitzt an den Stellen $x = \pm 1$ Wendepunkte mit den Koordinaten $(-1, \ln 2)$ bzw. $(1, \ln 2)$.

Es ist $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Lösung zu Aufgabe 7.25 **12/7/26/3**

(a) (i) Definitionsbereich, Nullstellen

Offenbar ist $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und $f(x) = 0 \iff x = 0$.

(ii) Monotonie

Es ist $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$. Wegen $f'(x) > 0$ für alle $x \in D(f)$ ist f in $(-\infty, -1)$ und in $(-1, \infty)$ streng monoton wachsend.

(iii) Konvexität

Es ist $f''(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$. Für $x < -1$ ist $f''(x) > 0$, und für $x > -1$ ist $f''(x) < 0$. Folglich ist f in $(-\infty, -1)$ streng konvex von unten und in $(-1, \infty)$ streng konvex von oben.

(iv) Lokale Extrema, Wendepunkte

Da f' und f'' keine Nullstellen haben, besitzt f kein lokales Extremum und keinen Wendepunkt.

(v) Unendlichkeitsstellen

f besitzt für $x = -1$ eine Unendlichkeitsstelle.
Es ist $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x<-1}} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} f(x) = -\infty$.

(vi) Verhalten im Unendlichen

Offenbar ist $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$ und $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 1$.

(b) (i) Definitionsbereich, Nullstellen

Es ist $D(f) = \mathbb{R}$ und $f(x) = 0 \iff x = 0$.

(ii) Monotonie

Es ist $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Wegen $f'(x) < 0$ für $x < 0$ und $f'(x) > 0$ für $x > 0$ ist f in $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend und in $[0, \infty)$ streng monoton wachsend.

(iii) Konvexität

Es ist $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$. Für $x < -1$ ist $f''(x) < 0$, für $-1 < x < 1$ ist $f''(x) > 0$ und für $x > -1$ ist $f''(x) < 0$. Folglich ist f in $(-\infty, -1]$ und in $[1, \infty)$ streng konvex von oben und in $[-1, 1]$ streng konvex von unten.

(iv) Lokale Extrema

$x = 0$ ist die einzige kritische Stelle. Wegen $f''(0) > 0$ besitzt f an dieser Stelle ein lokales Minimum der Größe $f(0) = 0$.

(v) Wendepunkte

Es ist $f'''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$.
Wegen $f''(x) = 0 \iff x = \pm 1$ und $f'''(\pm 1) \neq 0$ besitzt f an den Stellen $x = \pm 1$ Wendepunkte mit den Koordinaten $(-1, \ln 2)$ bzw. $(1, \ln 2)$.

(vi) Verhalten im Unendlichen

Es ist $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$.