

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.26 Für die folgenden Funktionen führe man eine Kurvendiskussion durch: 12/7/27/1

(a) $f(x) = x - \sin x$, (b) $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$,

(c) $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$, mit Zeichnung!

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.26 (a) $D(f) = \mathbb{R}$; $x = 0$ ist die einzige Nullstelle. 12/7/27/2

f ist in \mathbb{R} streng monoton wachsend.

Für $k \in \mathbb{Z}$ ist f in $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ streng konvex von unten und in $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ streng konvex von oben.

f besitzt keine lokalen Extrema.

Für $x_k = (k + \frac{1}{2})\pi$ besitzt f in x_k einen Wendepunkt mit den Koordinaten $(x_k, x_k - 1)$, falls k gerade und $(x_k, x_k + 1)$, falls k ungerade ist.

Es ist $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

(b) $D(f) = \mathbb{R}$; es gibt genau 3 Nullstellen, in jedem der Intervalle $[-\frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi]$ genau eine und $x = 0$.

Für $k \in \mathbb{Z}$ ist f in $[2k - \frac{1}{3}\pi, (2k + \frac{1}{3})\pi]$ streng monoton fallend und in $[(2k + \frac{1}{3})\pi, (2k + \frac{5}{3})\pi]$ streng monoton wachsend.

Die Konvexitätsbereiche stimmen mit denen von Aufgabe (a) überein.

f besitzt an der Stelle $x_k = (2k + \frac{1}{3})\pi$ ein lokales Minimum der Größe $\frac{x_k}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und an der Stelle $y_k = (2k - \frac{1}{3})\pi$ ein lokales Maximum der Größe $\frac{y_k}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$, ($k \in \mathbb{Z}$).

f besitzt an der Stelle $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, einen Wendepunkt mit den Koordinaten $(k\pi, \frac{k\pi}{2})$.

Es ist $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

(c) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $x = -1$ ist die einzige Nullstelle.

f ist in $(-\infty, 0)$ und in $[\sqrt[3]{2}, \infty)$ streng monoton wachsend und in $(0, \sqrt[3]{2}]$ streng monoton fallend.

f ist in $(-\infty, 0)$ und in $(0, \infty)$ streng konvex von unten.

f besitzt an der Stelle $x_0 = \sqrt[3]{2}$ ein lokales Minimum mit $f(x_0) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

f besitzt keine Wendepunkte.

Es ist $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \infty = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ und
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.