Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.26 Für die folgenden Funktionen führe man eine Kurvendiskussion durch: **12/7/27/1**

(a) $f(x) = x - \sin x$, (b) $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$,

(c) $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$, mit Zeichnung!

Lösung zu Aufgabe 7.26 **12/7/27/3**

(a) (i) Definitionsbereich, Nullstellen

Es ist $D(f) = \mathbb{R}$ und $f(x) = 0 \iff \sin x = x$; also $x = 0$ ist die einzige Nullstelle.

(ii) Monotonie

Es ist $f'(x) = 1 - \cos x$ und somit $f'(x) \geq 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $f'(x) = 0 \iff x = (k + \frac{1}{2})\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.
Folglich ist f in $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

(iii) Konvexität

Es ist $f''(x) = \sin x$. Für $0 < x < \pi$ ist $f''(x) > 0$ und für $\pi < x < 2\pi$ ist $f''(x) < 0$. Wegen $\sin(x+2\pi) = \sin x$ ist f in $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ streng konvex von unten und in $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ streng konvex von oben $(k \in \mathbb{Z})$.

(iv) Lokale Extrema

Die kritischen Stellen sind $x_k = (k + \frac{1}{2})\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Offenbar ist $f''(x_k) = 0$. Wir betrachten weitere Ableitungen.

(v) Wendepunkte

Es ist $f'''(x) = \cos x$ und $f'''(x_k) \neq 0$. Folglich besitzt f keine lokalen Extrema, aber an den Stellen x_k Wendepunkte mit den Koordinaten $(x_k, x_k - 1)$, falls k gerade und $(x_k, x_k + 1)$, falls k ungerade ist.

(vi) Verhalten im Unendlichen

Es ist $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(b) (i) Definitionsbereich, Nullstellen

Es ist $D(f) = \mathbb{R}$ und $f(x) = 0 \iff \sin x = \frac{x}{2}$.
Eine Nullstelle ist sofort ersichtlich, nämlich $x = 0$. Falls es weitere Nullstellen gibt, müssen diese im Intervall $(-\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi)$ liegen, da $\frac{|x|}{2} > 1$, falls $|x| > \frac{5}{6}\pi$.
Wir untersuchen jetzt f auf Nullstellen in $(-\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi)$. Dazu betrachten wir $f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x$.

Für $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$ ist $\cos x < \frac{1}{2}$ und somit $f'(x) > 0$. Folglich ist f in $[\frac{\pi}{3}, \frac{3}{5}\pi]$ streng monoton wachsend.

Weiterhin ist $f(\frac{\pi}{2}) < 0$ und $f(\frac{5}{6}\pi) > 0$. Wegen der Stetigkeit besitzt f nach dem Zwischenwertsatz in $(\frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi)$ eine Nullstelle und aufgrund der strengen Monotonie genau eine Nullstelle. Da f eine ungerade Funktion ist, liegt auch in $(-\frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{2})$ genau eine Nullstelle. Es bleiben noch die Intervalle $(0, \frac{\pi}{2})$, $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ zu betrachten. Wir zeigen, daß f dort keine Nullstelle besitzt.

Für $0 < |x| < \frac{\pi}{3}$ ist $f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x$ und somit f in $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ streng monoton fallend. Wegen $f(0) = 0$ besitzt f in $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ außer $x = 0$ keine weitere Nullstelle.
Für $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$ ist $f'(x) > 0$ und daher ist f in $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend. Wegen $f(\frac{\pi}{2}) < 0$ kann f in $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ keine Nullstelle besitzen. Da f ungerade ist, kann f auch in $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ keine Nullstelle haben.

Es gibt also insgesamt 3 Nullstellen: in jedem der Intervalle $[-\frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi]$ genau eine und $x = 0$. (Bei Bedarf müßten die Nullstellen näherungsweise berechnet werden.)

(ii) Monotonie

Für $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ ist $f'(x) < 0$, also f in $[\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi]$ streng monoton wachsend. Aufgrund der Periodizität von f' gilt dann: f ist in $[(2k - \frac{1}{3})\pi, (2k + \frac{1}{3})\pi]$ streng monoton fallend und in $[(2k+\frac{1}{3})\pi, (2k+\frac{5}{3})\pi]$ streng monoton wachsend $(k \in \mathbb{Z})$.

(iii) Konvexität

Es ist $f''(x) = \sin x$. Diese Ableitung stimmt mit der 2. Ableitung von f aus Aufgabe (a) überein. Folglich hat $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$ die dort ermittelten Konvexitätsbereiche.

(iv) Lokale Extrema

Es ist $f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x = 0 \iff \cos x = \frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Sei $x_k = (2k + \frac{1}{3})\pi$ und $y_k = (2k - \frac{1}{3})\pi$.
Wegen $f''(x) = \sin x$ ist $f''(x_k) = \frac{1}{2}\sqrt{3} > 0$ und $f''(y_k) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} < 0$.
Folglich besitzt f an den Stellen x_k ein lokales Minimum der Größe $f(x_k) = \frac{x_k}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und an den Stellen y_k ein lokales Maximum der Größe $f(y_k) = \frac{y_k}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

(v) Wendepunkte

Es ist $f''(x) = \sin x = 0 \iff x = k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.
Weiterhin ist $f''(k\pi) = \cos(k\pi) \neq 0$. Somit besitzt f an den Stellen $x_k = k\pi$ Wendepunkte mit den Koordinaten $(k\pi, \frac{k\pi}{2})$.

(vi) Verhalten im Unendlichen

Es ist $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(c) (i) Definitionsbereich, Nullstellen

Es ist $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f(x) = 0 \iff x^3 = -1 \iff x = -1$.

(ii) Monotonie

Es ist $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$. Für $x > \sqrt[3]{2}$ ist $f'(x) > 0$; für $0 < x < \sqrt[3]{2}$ ist $f'(x) < 0$ und für $x < 0$ ist $x^3 < 0$ und somit $f'(x) > 0$. Folglich ist f in $(-\infty, 0)$ und in $[\sqrt[3]{2}, \infty)$ streng monoton wachsend und in $(0, \sqrt[3]{2}]$ streng monoton fallend.

(iii) Konvexität

Es ist $f''(x) = \frac{6}{x^4}$ und $f''(x) > 0$ für alle $x \in D(f)$. Damit ist f in $(-\infty, 0)$ und in $(0, \infty)$ streng konvex von unten.

(iv) Lokale Extrema

Der einzige kritische Punkt ist durch $x = \sqrt[3]{2}$ gegeben. Wegen $f''(\sqrt[3]{2}) > 0$ besitzt f an der Stelle $x = \sqrt[3]{2}$ ein lokales Minimum der Größe $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

(v) Wendepunkte

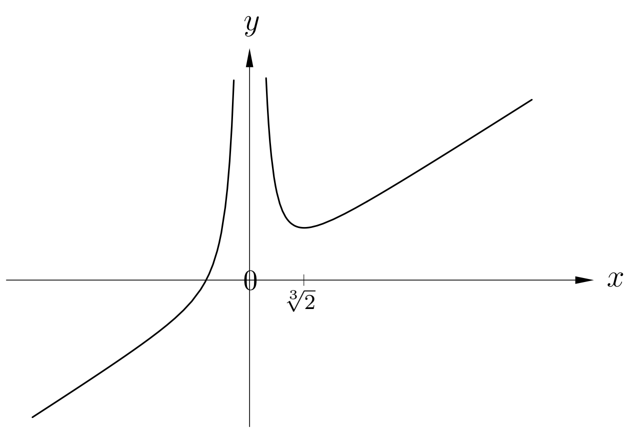
Da f'' keine Nullstellen hat, besitzt f auch keine Wendepunkte.

(vi) Unendlichkeitsstellen

Es ist $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \infty$.

(vii) Verhalten im Unendlichen

Es ist $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.



Die Funktion $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ besitzt für $x = -1$ eine Nullstelle. Sie ist in $(-\infty, 0)$ und in $[\sqrt[3]{2}, \infty)$ streng monoton wachsend und in $(0, \sqrt[3]{2}]$ streng monoton fallend. An der Stelle $x = \sqrt[3]{2}$ hat f ein lokales Minimum der Größe $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.