Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.28 Bestimmen Sie so viele Glieder wie möglich in der Taylorentwicklung von $f(x) = 6\sin x + x^2$ in $a = 0$. **12/7/29/1**

Lösung zu Aufgabe 7.28 Es ist am einfachsten, die Taylorreihe (vgl. 7/2/9, 7/2/12 und 7/2/14) von f zu betrachten. Dazu bilden wir alle Ableitungen von f: **12/7/29/3**

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 6\cos x + 2x, & f'(0) &= 6\\
f''(x) &= -6\sin x + 2, & f''(0) &= 2\\
f'''(x) &= -6\cos x, & f'''(0) &= -6\\
f^{(4)}(x) &= 6\sin x, & f^{(4)}(0) &= 0
\end{aligned}$$

Offenbar gilt dann auch für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
f^{(4n)}(x) &= 6\sin x, & f^{(4n)}(0) &= 0\\
f^{(4n+1)}(x) &= 6\cos x, & f^{(4n+1)}(0) &= 6\\
f^{(4n+2)}(x) &= -6\sin x, & f^{(4n+2)}(0) &= 0\\
f^{(4n+3)}(x) &= -6\cos x, & f^{(4n+3)}(0) &= -6.
\end{aligned}$$

Es ist

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i + R_n(x) \quad \text{mit} \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}.$$

Damit erhält man

$$|R_n(x)| =\leq \frac{6}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

für jedes fixierte $x \in \mathbb{R}$ und schließlich

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i.$$