

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.28 Bestimmen Sie so viele Glieder wie möglich in der Taylorentwicklung von 12/7/29/1
 $f(x) = 6 \sin x + x^2$ in $a = 0$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.28 Es ist $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i$ mit 12/7/29/2

$$f^{(4n)}(0) = 0, \quad f^{(4n+1)}(0) = 6, \quad f^{(4n+2)}(0) = 0, \quad f^{(4n+3)}(0) = -6 \quad \text{für } n \in \mathbf{N}.$$

Lösung zu Aufgabe 7.28 Es ist am einfachsten, die Taylorreihe (vgl. 7/2/9, 7/2/12 und 12/7/29/3
 7/2/14) von f zu betrachten. Dazu bilden wir alle Ableitungen von f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6 \cos x + 2x, & f'(0) &= 6 \\ f''(x) &= -6 \sin x + 2, & f''(0) &= 2 \\ f'''(x) &= -6 \cos x, & f'''(0) &= -6 \\ f^{(4)}(x) &= 6 \sin x, & f^{(4)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Offenbar gilt dann auch für alle $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} f^{(4n)}(x) &= 6 \sin x, & f^{(4n)}(0) &= 0 \\ f^{(4n+1)}(x) &= 6 \cos x, & f^{(4n+1)}(0) &= 6 \\ f^{(4n+2)}(x) &= -6 \sin x, & f^{(4n+2)}(0) &= 0 \\ f^{(4n+3)}(x) &= -6 \cos x, & f^{(4n+3)}(0) &= -6. \end{aligned}$$

Es ist

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i + R_n(x) \quad \text{mit} \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}.$$

Damit erhält man

$$|R_n(x)| \leq \frac{6}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

für jedes fixierte $x \in \mathbb{R}$ und schließlich

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i.$$