# Kapitel 12
# Aufgabensammlung

## 12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

**7.29** Ist der Fehler bei der Näherung $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ für $0 \le x \le \frac{1}{2}$ kleiner als $\frac{1}{100}$? Bestimmen Sie damit $\sqrt{e}$ auf 3 Stellen genau. **12/7/30/1**

**Lösung zu Aufgabe 7.29** Wir benutzen den Taylorschen Satz (vgl. 7/2/9). Es ist **12/7/30/3**

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i + R_n(x) \quad \text{mit} \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \vartheta(x-a))}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}.$$

Für $f(x) = e^x$ und $a = 0$ erhält man $f^{(i)}(x) = e^x$ und $f^{(i)}(0) = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und somit für $n = 3$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{e^{\vartheta x}}{4!} \cdot x^4.$$

Wegen $0 \le x \le \frac{1}{2}$ und $0 < \vartheta < 1$ ist $e^{\vartheta x} \le \sqrt{e} \le 2$ und $|x|^4 \le \frac{1}{2^4}$. Also

$$|R_n(x)| \le \frac{2}{4!} \cdot \frac{1}{2^4} < \frac{1}{100}.$$

Es ist $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$. Folglich kann der obere Ansatz für den restlichen Teil der Aufgabe genutzt werden. Allerdings muß $|R_n(x)| < \frac{1}{10^3}$ sein für $x = \frac{1}{2}$. Hierzu wählen wir $n = 4$, denn

$$|R_n(x)| \le \frac{e^{\frac{1}{2}\vartheta}}{5!} \cdot \frac{1}{2^5} < \frac{2}{5!2^5} = \frac{1}{10^4} < \frac{1}{10^3}.$$

Damit erhält man

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{6 \cdot 2^3} + \frac{1}{24 \cdot 2^4} \approx 1,6484.$$