Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.30 Prüfen Sie, ob in den folgenden Fällen die Voraussetzungen der Regel von de l'Hospital erfüllt sind, und bestimmen Sie die betreffenden Grenzwerte: **12/7/31/1**

(a) $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\sin x}$ für $x \to 0$,

(b) $\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\sin x \cdot \cos x}$ für $x \to 0$,

(c) $\dfrac{\ln x}{\ln(\sin x)}$ für $x \searrow 0$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.30 Die Voraussetzungen für die Regeln von de l'Hospital sind in jedem Fall erfüllt und es gilt: **12/7/31/2**

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\sin x} = 1.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\sin x \cdot \cos x} = 2.$

(c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln x}{\ln(\sin x)} = 1.$

Lösung zu Aufgabe 7.30 Offenbar sind alle in den Aufgaben (a) - (c) auftretenden Funktionen in ihren Definitionsbereichen differenzierbar. **12/7/31/3**

(a) Es gilt $\mathrm{e}^x - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ und $\sin \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Damit sind die Voraussetzungen für die Anwendung der Regel von de l'Hospital erfüllt und es ist
$$\frac{(\mathrm{e}^x - 1)'}{(\sin x)'} = \frac{\mathrm{e}^x}{\cos x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$
Folglich erhält man
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\sin x} = 1.$$

(b) Es gilt $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to 0]{} = 0$ und $\sin x \cos x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Die Voraussetzungen sind erfüllt und es gilt:
$$\frac{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})'}{(\sin x \cos x)'} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\cos^2 x - \sin^2 x} \xrightarrow[x\to 0]{} = 2.$$
Also
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\sin x \cos x} = 2.$$

(c) Es gilt $\ln x \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} -\infty$ und wegen $\sin x > 0$ für $0 < x < \pi$ ist $\ln(\sin x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} -\infty$. Damit sind auch hierfür die Voraussetzungen für die Anwendung der Regel von de l'Hospital erfüllt und man erhält

$$\frac{(\ln x)'}{(\ln(\sin x))'} = \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} 1.$$

Also

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\ln(\sin x)} = 1.$$