Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.31 Berechnen Sie mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital die folgenden Grenzwerte: **12/7/32/1**

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \sin x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2x}{x - \sin x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$,

(d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (2^x - 1)^{\sin x}$.

Lösung zu Aufgabe 7.31 **12/7/32/3**

(a) Es gilt $\tan x - x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $x - \sin x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ und somit

$$\frac{(\tan x - x)'}{(x-\sin x)'} = \frac{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} - 1}{1-\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x \cdot (1-\cos x)} = \frac{1+\cos x}{\cos^2 x} \xrightarrow[x\to 0]{} 2.$$

Folglich ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = 2.$$

(b) Es gilt $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $x - \sin x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ und somit

$$\frac{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2x)'}{(x-\sin x)'} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2}{1-\cos x}.$$

Wegen $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ und $1-\cos x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ kann die Regel noch einmal angewendet werden. Dadurch erhält man

$$\frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2)'}{(1-\cos x)'} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\sin x} \quad \text{mit} \quad \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad \text{und} \quad \sin x \xrightarrow[x\to x]{} 0.$$

Erneute Anwendung der Regel liefert

$$\frac{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})'}{(\sin x)'} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\cos x} \xrightarrow[x\to 0]{} 2.$$

Schließlich gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2x}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\cos x} = 2.$$

(c) Es gilt $\sqrt[3]{1+2x}+1 \xrightarrow[x\to -1]{} 0$, $\sqrt{2+x}+x \xrightarrow[x\to -1]{} 0$ und somit

$$\frac{(\sqrt[3]{1+2x}+1)'}{(\sqrt{2+x}+x)'} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2+x}}+1} \xrightarrow[x\to -1]{} \frac{4}{9}.$$

(d) Es gilt $2^x - 1 \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{}$ und $\sin x \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 0$. Damit haben wir die Form „0^0“.

Für $x > 0$ ist

$$(2^x - 1)^{\sin x} = \mathrm{e}^{\sin x \cdot \ln(2^x - 1)}.$$

Wir berechnen zunächst den Grenzwert des Exponenten. Aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion erhält man daraus den gewünschten Grenzwert.

Wegen $\sin x \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 0$ und $\ln(2^x - 1) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} -\infty$ bilden wir

$$\sin x \cdot \ln(2^x - 1) = \frac{\ln(2^x - 1)}{\frac{1}{\sin x}}.$$

Somit entsteht die Form „$\frac{-\infty}{\infty}$“. Schließlich gilt:

$$(\star) := \frac{(\ln(2^x - 1))'}{(\frac{1}{\sin x})'} = \frac{\frac{\ln 2 \cdot 2^x}{2^x - 1}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = -\frac{\ln 2 \cdot 2^x}{\cos x} \cdot \frac{\sin^2 x}{2^x - 1}.$$

Offenbar ist $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \Big(-\frac{\ln 2 \cdot 2^x}{\cos x} \Big) = -\ln 2$, aber $\sin^2 x \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 0$ und $2^x - 1 \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 0$, folglich wenden wir für $\frac{\sin^2 x}{2^x - 1}$ noch einmal die Regel von de l'Hospital an:

$$\frac{(\sin^2 x)'}{(2^x - 1)'} = \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\ln 2 \cdot 2^x} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 0.$$

Damit erhält man $(\star) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} (-\ln 2) \cdot 0 = 0$ und schließlich

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (2^x - 1)^{\sin x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$