

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.31 Berechnen Sie mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital die folgenden Grenzwerte: 12/7/32/1

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt{2+x} + x},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}, \quad (d) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2^x - 1)^{\sin x}.$$

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.31 (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = 2.$ 12/7/32/2

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2.$$

$$(c) \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt{2+x} + x} = \frac{4}{9}.$$

$$(d) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2^x - 1)^{\sin x} = e^0 = 1.$$

Lösung zu Aufgabe 7.31 12/7/32/3

(a) Es gilt $\tan x - x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, $x - \sin x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ und somit

$$\frac{(\tan x - x)'}{(x - \sin x)'} = \frac{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot (1 - \cos x)} = \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2.$$

Folglich ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = 2.$$

(b) Es gilt $e^x - e^{-x} - 2x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, $x - \sin x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ und somit

$$\frac{(e^x - e^{-x} - 2x)'}{(x - \sin x)'} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}.$$

Wegen $e^x + e^{-x} - 2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ und $1 - \cos x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ kann die Regel noch einmal angewendet werden. Dadurch erhält man

$$\frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(1 - \cos x)'} = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \text{ mit } e^x - e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \text{ und } \sin x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Erneute Anwendung der Regel liefert

$$\frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} = \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2.$$

Schließlich gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

(c) Es gilt $\sqrt[3]{1+2x} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow -1} 0$, $\sqrt{2+x} + x \xrightarrow{x \rightarrow -1} 0$ und somit

$$\frac{(\sqrt[3]{1+2x} + 1)'}{(\sqrt{2+x} + x)'} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2+x}} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow -1} \frac{4}{9}.$$

(d) Es gilt $2^x - 1 \xrightarrow[x>0]{x \rightarrow 0}$ und $\sin x \xrightarrow[x>0]{x \rightarrow 0} 0$. Damit haben wir die Form „ 0^0 “.

Für $x > 0$ ist

$$(2^x - 1)^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln(2^x - 1)}.$$

Wir berechnen zunächst den Grenzwert des Exponenten. Aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion erhält man daraus den gewünschten Grenzwert.

Wegen $\sin x \xrightarrow[x>0]{x \rightarrow 0} 0$ und $\ln(2^x - 1) \xrightarrow[x>0]{x \rightarrow 0} -\infty$ bilden wir

$$\sin x \cdot \ln(2^x - 1) = \frac{\ln(2^x - 1)}{\frac{1}{\sin x}}.$$

Somit entsteht die Form „ $\frac{-\infty}{\infty}$ “. Schließlich gilt:

$$(\star) := \frac{(\ln(2^x - 1))'}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)'} = \frac{\frac{\ln 2 \cdot 2^x}{2^x - 1}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = -\frac{\ln 2 \cdot 2^x}{\cos x} \cdot \frac{\sin^2 x}{2^x - 1}.$$

Offenbar ist $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\ln 2 \cdot 2^x}{\cos x}\right) = -\ln 2$, aber $\sin^2 x \xrightarrow[x>0]{x \rightarrow 0} 0$ und $2^x - 1 \xrightarrow[x>0]{x \rightarrow 0} 0$,

folglich wenden wir für $\frac{\sin^2 x}{2^x - 1}$ noch einmal die Regel von de l'Hospital an:

$$\frac{(\sin^2 x)'}{(2^x - 1)'} = \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\ln 2 \cdot 2^x} \xrightarrow[x>0]{x \rightarrow 0} 0.$$

Damit erhält man $(\star) \xrightarrow[x>0]{x \rightarrow 0} (-\ln 2) \cdot 0 = 0$ und schließlich

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2^x - 1)^{\sin x} = e^0 = 1.$$