Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.32 Mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital bestimme man folgende Grenzwerte: **12/7/33/1**

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} (\sin x)^x$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^{-x}}{1 - x - \log_a(a-x)}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$,

(d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\cdot\tan x$,

(e) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} \dfrac{\arcsin\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a}}}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0)$,

(f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.32 (a) $\lim\limits_{\substack{x\to x\\x>0}} (\sin x)^x = \mathrm{e}^0 = 1.$ **12/7/33/2**

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^{-x}}{1 - x - \log_a(a-x)} = \dfrac{2a\cdot(\ln a)^2}{1 - a\cdot\ln a} \quad (\ln a \neq \frac{1}{a}).$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)} = \sqrt{a\cdot b}.$

(d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\cdot\tan x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\sin x} = 0.$

(e) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} \dfrac{\arcsin\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a}}}{\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}.$

(f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = \mathrm{e}^0 = 1.$

Lösung zu Aufgabe 7.32 **12/7/33/3**

(a) Für $x > 0$ ist $(\sin x)^x = \mathrm{e}^{x\cdot\ln(\sin x)}$. Wir berechnen zunächst den Grenzwert des Exponenten $x\cdot\ln(\sin x)$, der die Gestalt „$0\cdot\infty$" besitzt. Es ist

$$x\cdot\ln(\sin x) = \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} \quad \text{und somit}$$

$$\frac{(\ln(\sin x))'}{(\frac{1}{x})'} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x\cdot\cos x\cdot\frac{x}{\sin x} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\x>0}]{} 0.$$

Folglich ist

$$\lim_{\substack{x\to x\\x>0}} (\sin x)^x = \mathrm{e}^0 = 1.$$

(b) Es gilt $a^x - a^{-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $1 - x - \log_a(a-x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ und somit

$$\frac{(a^x - a^{-x})'}{(1 - x - \log_a(a-x))'} = \frac{(\ln a)^2(a^x + a^{-x})(a-x)}{1 - (a-x)\cdot\ln a} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{2a\cdot(\ln a)^2}{1 - a\cdot\ln a}$$

für $\ln a \neq \dfrac{1}{a}$ (anderenfalls läßt sich der Grenzwert so nicht untersuchen).

Folglich ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{-x}}{1 - x - \log_a(a-x)} = \frac{2a\cdot(\ln a)^2}{1 - a\cdot\ln a} \quad (\ln a \neq \tfrac{1}{a}).$$

(c) Es ist $\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln(\frac{a^x+b^x}{2})}$.
Wir berechnen zunächst den Grenzwert des Exponenten:

$$\frac{\left(\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right)'}{(x)'} = \frac{a^x\cdot\ln a + b^x\cdot\ln b}{a^x+b^x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\ln a+\ln b}{2}.$$

Folglich gilt:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)} = \sqrt{a\cdot b}.$$

(d) Für $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ gilt:

$$(1-\sin x)\cdot\tan x = \sin x\cdot\frac{1-\sin x}{\cos x}.$$

Wegen $\sin x \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}]{} 1$ wenden wir die Regel nur auf $\frac{1-\sin x}{\cos x}$ an. Es ist

$$\frac{(1-\sin x)'}{(\cos x)'} = \frac{\cos x}{\sin x} \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}]{} 0, \quad \text{also}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\cdot\tan x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x} = 0.$$

(e) Wegen $\arcsin\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a}} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x<0}]{} 0$ und $\sqrt{a^2-x^2} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x<0}]{} 0$ kann die Regel angewendet werden, und es gilt:

$$\frac{\left(\arcsin\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a}}\right)'}{(\sqrt{a^2-x^2})'} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2-x^2}{a}}}\cdot\frac{-2x}{2a\cdot\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a}}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{a^2-x^2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{a-a^2+x^2}}\cdot\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}}{\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a-a^2+x^2}} \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x<a}]{} \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Also

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{\arcsin\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a}}}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

(f) Für $0<x<\pi$ und $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ ist $(\sin x)^{\tan x} = \mathrm{e}^{\tan x\cdot\ln(\sin x)}$.
Wir berechnen den Grenzwert des Exponenten. Es ist

$$\tan x\cdot\ln(\sin x) = \sin x\cdot\frac{\ln(\sin x)}{\cos x} \quad\text{und}\quad \sin x \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}]{} 1.$$

Wegen $\ln(\sin x) \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}]{} 0$ und $\cos x \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}]{} 0$ ist die Regel auf $\frac{\ln(\sin x)}{\cos x}$ anwendbar:

$$\frac{(\ln(\sin x))'}{(\cos x)'} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}]{} 0.$$

Also

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$