Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.33 Eine in einer Umgebung U von a definierte Funktion f heißt an der Stelle a lokal monoton wachsend, wenn gilt: **12/7/34/1**

Für alle $x \in U$ mit $x < a$ ist $f(x) < f(a)$ und
für alle $x \in U$ mit $x > a$ ist $f(x) > f(a)$.

(a) Zeigen Sie: Ist f in a differenzierbar und $f'(a) > 0$, so ist f in a lokal monoton wachsend.

(b) Man zeige durch ein Beispiel, daß nicht gilt: Ist $f'(a) > 0$, so existiert eine Umgebung U von a, in welcher f monoton wächst.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.33 (a) Wegen $0 < f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ und der Definition des Limes existiert **12/7/34/2**

eine Umgebung $U(a)$, so daß $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$ für alle $x \in U(a)$.
Hieraus folgt die Behauptung.

(b) Die Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \cdot \sin \frac{\pi}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ leistet das Verlangte.