Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.33 Eine in einer Umgebung U von a definierte Funktion f heißt an der Stelle a lokal monoton wachsend, wenn gilt: **12/7/34/1**

Für alle $x \in U$ mit $x < a$ ist $f(x) < f(a)$ und
für alle $x \in U$ mit $x > a$ ist $f(x) > f(a)$.

(a) Zeigen Sie: Ist f in a differenzierbar und $f'(a) > 0$, so ist f in a lokal monoton wachsend.

(b) Man zeige durch ein Beispiel, daß nicht gilt: Ist $f'(a) > 0$, so existiert eine Umgebung U von a, in welcher f monoton wächst.

Lösung zu Aufgabe 7.33 **12/7/34/3**

(a) Nach Voraussetzung ist $0 < f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
Aufgrund der Definition des Limes existiert dann eine Umgebung $U(a)$, so daß $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$ für alle $x \in U(a)$. Damit erhält man:

(i) Wenn $x < a$, so $f(x) - f(a) < 0$ und daher $f(x) < f(a)$ für $x \in U(a)$.

(ii) Wenn $x > a$, so $f(x) - f(a) > 0$ und daher $f(x) > f(a)$ für $x \in U(a)$.

Folglich ist f in $U(a)$ lokal monoton wachsend.

(b) Es sei $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \cdot \sin \frac{\pi}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

f ist an der Stelle $x = 0$ differenzierbar und es gilt:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x}{2} + x^2 \cdot \sin \frac{\pi}{x}}{x} = \frac{1}{2} + x \cdot \sin \frac{\pi}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}.$$

Folglich ist $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$.
Angenommen, es gibt eine Umgebung $U(0)$, so daß f in $U(0)$ monoton wächst.
Dann gilt für alle $x, y \in U(0)$: Wenn $x < y$, so $f(x) \leq f(y)$.
Sei $k \in \mathbb{N}$, so daß $x = \dfrac{1}{2k + \frac{1}{2}}$, $y = \dfrac{1}{2k - \frac{1}{2}}$ und $x, y \in U(0)$. Offenbar ist $x < y$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(x) \leq f(y) &\iff \frac{1}{2(2k + \frac{1}{2})} + \frac{1}{(2k + \frac{1}{2})^2} \leq \frac{1}{2(2k - \frac{1}{2})} - \frac{1}{(2k - \frac{1}{2})^2} \\ &\iff \frac{2k + \frac{5}{2}}{2(2k + \frac{1}{2})^2} \leq \frac{2k - \frac{5}{2}}{2(2k - \frac{1}{2})^2} \\ &\iff (2k + \tfrac{5}{2})(2k - \tfrac{1}{2})^2 \leq (2k - \tfrac{5}{2})(2k + \tfrac{1}{2})^2 \\ &\iff 12k^2 + \tfrac{5}{4} < 0 \quad \lightning ! \end{aligned}$$

Folglich ist f in $U(0)$ nicht monoton wachsend.