

## Kapitel 12 Aufgabensammlung

### 12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

**7.33** Eine in einer Umgebung  $U$  von  $a$  definierte Funktion  $f$  heißt an der Stelle  $a$  12/7/34/1  
 lokal monoton wachsend, wenn gilt:

Für alle  $x \in U$  mit  $x < a$  ist  $f(x) < f(a)$  und  
 für alle  $x \in U$  mit  $x > a$  ist  $f(x) > f(a)$ .

- (a) Zeigen Sie: Ist  $f$  in  $a$  differenzierbar und  $f'(a) > 0$ , so ist  $f$  in  $a$  lokal monoton wachsend.  
 (b) Man zeige durch ein Beispiel, daß nicht gilt: Ist  $f'(a) > 0$ , so existiert eine Umgebung  $U$  von  $a$ , in welcher  $f$  monoton wächst.

**Lösungshinweis zu Aufgabe 7.33** (a) Wegen  $0 < f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  und der 12/7/34/2  
 Definition des Limes existiert

eine Umgebung  $U(a)$ , so daß  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$  für alle  $x \in U(a)$ .

Hieraus folgt die Behauptung.

- (b) Die Funktion  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \cdot \sin \frac{\pi}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$  leistet das Verlangte.

### Lösung zu Aufgabe 7.33

12/7/34/3

- (a) Nach Voraussetzung ist  $0 < f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .

Aufgrund der Definition des Limes existiert dann eine Umgebung  $U(a)$ , so daß  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$  für alle  $x \in U(a)$ . Damit erhält man:

- (i) Wenn  $x < a$ , so  $f(x) - f(a) < 0$  und daher  $f(x) < f(a)$  für  $x \in U(a)$ .  
 (ii) Wenn  $x > a$ , so  $f(x) - f(a) > 0$  und daher  $f(x) > f(a)$  für  $x \in U(a)$ .

Folglich ist  $f$  in  $U(a)$  lokal monoton wachsend.

- (b) Es sei  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \cdot \sin \frac{\pi}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

$f$  ist an der Stelle  $x = 0$  differenzierbar und es gilt:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x}{2} + x^2 \cdot \sin \frac{\pi}{x}}{x} = \frac{1}{2} + x \cdot \sin \frac{\pi}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}.$$

Folglich ist  $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$ .

Angenommen, es gibt eine Umgebung  $U(0)$ , so daß  $f$  in  $U(0)$  monoton wächst. Dann gilt für alle  $x, y \in U(0)$ : Wenn  $x < y$ , so  $f(x) \leq f(y)$ .

Sei  $k \in \mathbb{N}$ , so daß  $x = \frac{1}{2k + \frac{1}{2}}$ ,  $y = \frac{1}{2k - \frac{1}{2}}$  und  $x, y \in U(0)$ . Offenbar ist  $x < y$ .

Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(x) \leq f(y) &\iff \frac{1}{2(2k + \frac{1}{2})} + \frac{1}{(2k + \frac{1}{2})^2} \leq \frac{1}{2(2k - \frac{1}{2})} - \frac{1}{(2k - \frac{1}{2})^2} \\ &\iff \frac{2k + \frac{5}{2}}{2(2k + \frac{1}{2})^2} \leq \frac{2k - \frac{5}{2}}{2(2k - \frac{1}{2})^2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (2k + \frac{5}{2})(2k - \frac{1}{2})^2 \leq (2k - \frac{5}{2})(2k + \frac{1}{2})^2$$

$$\Leftrightarrow 12k^2 + \frac{5}{4} < 0 \quad \downarrow \text{!}$$

Folglich ist  $f$  in  $U(0)$  nicht monoton wachsend.