Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.34 Zeigen Sie, daß die Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ **12/7/35/1**
an der Stelle 0 ein lokales Extremum hat, ohne links und rechts von 0 eindeutiges Monotonieverhalten zu zeigen, d.h., es existiert kein $\varepsilon > 0$, so daß f in $(-\varepsilon, 0)$ und in $(0, \varepsilon)$ monoton ist.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.34 Offenbar ist $f(x) > 0$ für alle $x \neq 0$. Folglich **12/7/35/2**
besitzt f in 0 ein lokales Minimum.
Für $x_k = \dfrac{1}{2k\pi}$ und $y_k = \dfrac{1}{(2k+1)\pi}$ mit $k \in \mathbb{N}$ gilt: $f'(x_k) < 0$ und $f'(y_k) > 0$. Hieraus erhält man schließlich die Behauptung.

Lösung zu Aufgabe 7.34 Es ist $f(0) = 0$ und $|\sin\frac{1}{x}| \leq 1$. Folglich ist $f(x) =$ **12/7/35/3**
$x^2(2+\sin\frac{1}{x}) \geq x^2 > 0$ für alle $x \neq 0$. Daher besitzt f in 0 ein lokales Minimum. Für $x \neq 0$ ist

$$f'(x) = 2x\cdot(2+\sin\tfrac{1}{x}) - \cos\tfrac{1}{x}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir zeigen, daß f in $(0, \varepsilon)$ weder monoton wächst noch monoton fällt. Sei $k \in \mathbb{N}$, $x_k = \frac{1}{2k\pi}$, $y_k = \frac{1}{(2k+1)\pi}$ und k so groß, daß $0 < x_k < y_k < \varepsilon$.
Dann ist

$$\sin\frac{1}{x_k} = \sin\frac{1}{y_k} = 0 \quad \text{und} \quad \cos\frac{1}{x_k} = 1, \;\; \cos\frac{1}{y_k} = -1.$$

Daraus folgt

$$f'(x_k) = \frac{4}{2k\pi} - 1 < 0 \quad \text{und} \quad f'(y_k) = \frac{4}{(2k+1)\pi} + 1 > 0.$$

Aufgrund der Stetigkeit von f' in $(0, \varepsilon)$ gibt es eine Umgebung $U'(x_k) \subseteq (0, \varepsilon)$, so daß f' dort negativ und eine Umgebung $U''(y_k) \subseteq (0, \varepsilon)$, so daß f' dort positiv ist (vgl. 6/3/11), d.h., f ist in $(0, \varepsilon)$ weder monoton wachsend noch monoton fallend.
Analog behandelt man $(-\varepsilon, 0)$.