Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.36 Das Maximum einer in einem Intervall $I = [a, b]$ definierten Funktion f könnte man näherungsweise wie folgt bestimmen: **12/7/37/1**
Man unterteilt I in gleich lange Teilintervalle, berechnet die Funktionswerte an allen Teilungspunkten und sucht sich den größten Funktionswert heraus.

(a) Es sei nun f in I differenzierbar und $|f'(x)| < c$ für alle $x \in I$. Man schätze den Fehler ab, den man bei der oben beschriebenen Methode begeht.

(b) Wie fein müßte man bei der Berechnung des Maximums der Funktion f mit $f(x) = \sin(\ln x) + \cos 3x$ im Intervall $[\pi, 2\pi]$ die Unterteilung wählen, um sicher zu sein, daß das berechnete Maximum höchstens um 0,01 vom tatsächlichen abweicht?

Lösung zu Aufgabe 7.36 **12/7/37/3**

(a) Wir zerlegen das Intervall $I = [a, b]$ durch $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ in Teilintervalle $I_i = [a_i, a_{i+1}]$, $0 \le i < n$, so daß $a_{i+1} = a_0 + \frac{b-a}{n} \cdot (i+1)$. Die Länge jedes Teilintervalls beträgt dann $\frac{b-a}{n}$. Das (durch die oben beschriebene Methode) näherungsweise bestimmte Maximum M_n ist gegeben durch

$$M_n = \max\{f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_n)\}.$$

Sei nun $x \in I_i$, r einer der beiden Randpunkte von I_i mit $x \neq r$. Nach dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt:

$$\frac{f(x) - f(r)}{x - r} = f'(z) \quad \text{für ein } z \text{ zwischen } x \text{ und } r, \text{ also}$$

$$|f(x) - f(r)| = |f'(z)| \cdot |x - r| \le c \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Der Fehler bei der obigen Methode beträgt also höchstens $c \cdot \frac{b-a}{n}$.

(b) Es ist $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \cos(\ln x) - 3 \cdot \sin 3x$ und somit

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\le |\tfrac{1}{x}| \cdot |\cos(\ln x)| + 3 \cdot |\sin 3x| \\ &\le \tfrac{1}{\pi} + 3 \le \tfrac{10}{3} \quad \text{für } x \in [\pi, 2\pi]. \end{aligned}$$

Nach Aufgabe (a) ist der Fehler höchstens $\frac{10}{3} \cdot \frac{b-a}{n}$. Wir suchen jetzt ein n, so daß $\frac{10}{3} \cdot \frac{b-a}{n} < \frac{1}{100}$, d.h. $\frac{1000}{3} \cdot \pi < n$; $n = 1048$ leistet das Verlangte.