Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.37 Die Zahl 8 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, daß die Summe der Kuben dieser Summanden am kleinsten ist. **12/7/38/1**

Lösung zu Aufgabe 7.37 Nach Voraussetzung ist $x+y=8$ mit $x,y \in \mathbb{R}$ und der Nebenbedingung, daß x^3+y^3 minimal wird. Es ist $y=8-x$. Wir suchen ein globales Minimum von **12/7/38/3**

$$f(x) = x^3 + y^3 = x^3 + (8-x)^3.$$

Dazu untersuchen wir f zunächst auf lokale Extrema. Es ist

$$f'(x) = -48(4-x), \quad f''(x) = 48 \quad \text{und somit}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 4 \quad \text{und} \quad f''(4) > 0.$$

Folglich besitzt f an der Stelle $x=4$ ein lokales Minimum. Läßt man als Definitionsbereich von f ganz $\mathbb{R}$ zu, so ist offenbar das lokale Minimum auch das globale. Schränkt man den Definitinosbereich auf $[0,8]$ ein, dann muß $f(4) = 2{\cdot}4^3$ mit $f(0) = f(8) = 8^3$ verglichen werden. Dies zeigt, daß auch in diesem Fall f an der Stelle $x=4$, $(y=4)$ ein globales Minimum besitzt.