

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.37 Die Zahl 8 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, daß die Summe der Kuben dieser Summanden am kleinsten ist. 12/7/38/1

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.37 $8 = x + y$ mit $x = 4$ und $y = 4$ leistet das Verlangte. 12/7/38/2

Lösung zu Aufgabe 7.37 Nach Voraussetzung ist $x + y = 8$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und der Nebenbedingung, daß $x^3 + y^3$ minimal wird. Es ist $y = 8 - x$. Wir suchen ein globales Minimum von 12/7/38/3

$$f(x) = x^3 + y^3 = x^3 + (8 - x)^3.$$

Dazu untersuchen wir f zunächst auf lokale Extrema. Es ist

$$f'(x) = -48(4 - x), \quad f''(x) = 48 \quad \text{und somit}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 4 \quad \text{und} \quad f''(4) > 0.$$

Folglich besitzt f an der Stelle $x = 4$ ein lokales Minimum. Läßt man als Definitionsbereich von f ganz \mathbb{R} zu, so ist offenbar das lokale Minimum auch das globale. Schränkt man den Definitionsbereich auf $[0, 8]$ ein, dann muß $f(4) = 2 \cdot 4^3$ mit $f(0) = f(8) = 8^3$ verglichen werden. Dies zeigt, daß auch in diesem Fall f an der Stelle $x = 4$, ($y = 4$) ein globales Minimum besitzt.