Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.39 Welche Länge muß die Grundseite eines regulären dreieckigen Prismas mit gegebenem Volumen haben, damit die Oberfläche minimal wird? **12/7/40/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.39 Ist V das Volumen des Prismas, so ist die Länge der Grundlinie des Prismas durch $\sqrt[3]{4V}$ gegeben. **12/7/40/2**

Lösung zu Aufgabe 7.39 Es sei x die Länge der Grundlinie und h die Höhe des Prismas. Das (gegebene) Volumen beträgt $V = \frac{x^2}{4} \cdot h \cdot \sqrt{3}$ (mit $x > 0$, da sonst $V = 0$ für $x = 0$) und die Oberfläche ist gegeben durch $O = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x^2 + 3xh$. Wegen $h = \frac{4V}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x^2}$ ist **12/7/40/3**

$$O(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x^2 + \frac{12V}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x}.$$

Wir suchen ein globales Minimum von O. Dazu untersuchen wir O zunächst auf lokale Extrema. Es ist

$$O'(x) = \sqrt{3} \cdot x - \frac{12V}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x^2} \quad \text{und} \quad O''(x) = \sqrt{3} + \frac{24V}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x^3}.$$

Weiterhin gilt:

$$O'(x) = 0 \iff x = \sqrt[3]{4V} \quad \text{und somit}$$

$$O''(\sqrt[3]{4V}) = \frac{9}{\sqrt{3}} > 0.$$

Folglich besitzt O an der Stelle $x = \sqrt[3]{4V}$ ein lokales Minimum, das gleichzeitig globales Minimum ist (da die Randpunkte von $D(O)$ nicht zu $D(O)$ gehören).