

## Kapitel 12

### Aufgabensammlung

#### 12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

- 7.40** Ein oben offenes zylindrisches Gefäß mit kreisförmiger Grundfläche soll ein vorgeschriebenes Volumen  $V$  besitzen. Der Herstellungspreis für  $1 \text{ m}^2$  Mantelfläche betrage  $a$ , derjenige für  $1 \text{ m}^2$  Grundfläche betrage  $b$ , ( $a, b > 0$ ). Welche Abmessungen muß das Gefäß haben, damit die Herstellungskosten möglichst gering sind? 12/7/41/1

**Lösung zu Aufgabe 7.40** Es sei  $r$  der Radius und  $h$  die Höhe des Gefäßes. Dann ist  $V = r^2\pi h$  das gegebene Volumen und  $h = \frac{V}{\pi r^2}$ . Somit entstehen Materialkosten in Höhe von 12/7/41/3

$$K(r) = 2r\pi ha + r^2\pi b = \frac{2aV}{r} + b\pi r^2.$$

Es ist

$$K'(r) = -\frac{2aV}{r^2} + 2b\pi r, \quad K''(r) = \frac{4aV}{r^3} + 2b\pi, \quad \text{also}$$

$$K'(r) = 0 \iff r^3 = \frac{aV}{b\pi} \quad \text{und somit} \quad r = \sqrt[3]{\frac{aV}{b\pi}}.$$

Weiterhin gilt:

$$K''\left(\sqrt[3]{\frac{aV}{b\pi}}\right) = 6b\pi > 0.$$

Folglich besitzt  $K$  an der Stelle  $r = \sqrt[3]{\frac{aV}{b\pi}}$  ein lokales Minimum. Wegen  $D(K) = [0, \infty)$  und  $K(0) = 0$  ist das lokale Minimum auch das globale. Die Abmessungen des Gefäßes sind gegeben durch

$$r = \sqrt[3]{\frac{aV}{b\pi}} \quad \text{und} \quad h = \frac{V}{\pi \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{aV}{b\pi}\right)^2}}.$$