Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.40 Ein oben offenes zylindrisches Gefäß mit kreisförmiger Grundfläche soll ein vorgeschriebenes Volumen V besitzen. Der Herstellungspreis für $1\,\mathrm{m}^2$ Mantelfläche betrage a, derjenige für $1\,\mathrm{m}^2$ Grundfläche betrage b, $(a, b > 0)$. **12/7/41/1**
Welche Abmessungen muß das Gefäß haben, damit die Herstellungskosten möglichst gering sind?

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.40 Die Abmessungen des Gefäßes betragen: $r = \sqrt[3]{\frac{aV}{b\pi}}$ **12/7/41/2**
und $h = \frac{V}{\pi \cdot \sqrt[3]{(\frac{aV}{b\pi})^2}}$, wobei r den Radius und h die Höhe bezeichnen.

Lösung zu Aufgabe 7.40 Es sei r der Radius und h die Höhe des Gefäßes. Dann **12/7/41/3**
ist $V = r^2\pi h$ das gegebene Volumen und $h = \frac{V}{\pi r^2}$. Somit entstehen Materialkosten in Höhe von

$$K(r) = 2r\pi h a + r^2\pi b = \frac{2aV}{r} + b\pi r^2.$$

Es ist

$$K'(r) = -\frac{2aV}{r^2} + 2b\pi r, \quad K''(r) = \frac{4aV}{r^3} + 2b\pi, \text{ also}$$

$$K'(r) = 0 \iff r^3 = \frac{aV}{b\pi} \quad \text{und somit} \quad r = \sqrt[3]{\frac{aV}{b\pi}}.$$

Weiterhin gilt:

$$K''\Big(\sqrt[3]{\tfrac{aV}{b\pi}}\Big) = 6b\pi > 0.$$

Folglich besitzt K an der Stelle $r = \sqrt[3]{\frac{aV}{b\pi}}$ ein lokales Minimum. Wegen $D(K) = [0, \infty)$ und $K(0) = 0$ ist das lokale Minimum auch das globale. Die Abmessungen des Gefäßes sind gegeben durch

$$r = \sqrt[3]{\frac{aV}{b\pi}} \quad \text{und} \quad h = \frac{V}{\pi \cdot \sqrt[3]{(\frac{aV}{b\pi})^2}}\,.$$