Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.41 Von allen Quadern mit quadratischer Grundfläche, für die das Verhältnis von Volumen zur Oberfläche einen gegebenen Wert besitzt, soll derjenige bestimmt werden, für den der Mantel möglichst klein wird. **12/7/42/1**

Lösung zu Aufgabe 7.41 Sei x die Länge einer Seite der Grundfläche und h die Höhe des Quaders. Volumen, Oberfläche und Mantel des Quaders sind gegeben durch **12/7/42/3**

$$V = x^2 \cdot h, \quad O = 2x^2 + 4xh, \quad M = 4xh.$$

Es sei $\frac{V}{O} = \frac{xh}{2x+4h} := c > 0$, dann ist $h = \frac{2cx}{x-4c}$ und somit

$$M(x) = \frac{8cx^2}{x-4c}, \quad x \neq 4c.$$

(Für $x = 4c$ erhält man aus $\frac{V}{O} = c = \frac{4ch}{8c+4h}$ leicht $2c^2 = 0$ $\lightning$!)

Wir suchen ein globales Minimum von M. Dazu untersuchen wir M auf lokale Extrema. Es ist

$$M'(x) = \frac{8cx(x-8c)}{(x-4c)^2} \quad \text{und} \quad M''(x) = \frac{16^2c^3}{(x-4c)^3}.$$

Weiterhin gilt:

$$M'(x) = 0 \iff x = 0 \text{ oder } x = 8c.$$

$x = 0$ scheidet als Lösung aus, es bleibt $x = 8c$ zu betrachten.

$$M''(8c) = \frac{16^2c^3}{(8c-4c)^3} = 4 > 0.$$

Folglich besitzt M an der Stelle $x = 8c$ ein lokales Minimum, das gleichzeitig globales Minimum ist.