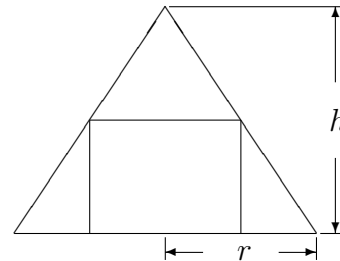


Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.42 Einem geraden Kreiskegel mit dem Radius r und der Höhe h soll ein gerader Kreiszylinder einbeschrieben werden (vgl. Zeichnung).

Welche Abmessungen muß der Kreiszylinder haben, damit sein Volumen möglichst groß wird.



12/7/43/1

Lösung zu Aufgabe 7.42 Es sei x der Radius und y die Höhe des einbeschriebenen Zylinders. Sein Volumen beträgt $V = x^2\pi y$. Der Punkt (x, y) , der die obere rechte Ecke des Zylinders (in der Seitenansicht – vgl. Zeichnung) markiert, genügt der Gleichung $y = -\frac{h}{r} \cdot x + h$.

12/7/43/3

Folglich ist

$$V(x) = x^2\pi\left(-\frac{h}{r} \cdot x + h\right) = -\frac{h\pi}{r} \cdot x^3 + h\pi x^2.$$

Wir suchen ein globales Maximum von V . Dazu untersuchen wir V auf lokale Extrema. Es ist

$$V'(x) = h\pi x \cdot \left(2 - \frac{3}{r} \cdot x\right) \quad \text{und} \quad V''(x) = 2h\pi \cdot \left(1 - \frac{3}{r} \cdot x\right).$$

Weiterhin gilt:

$$V'(x) = 0 \iff x = 0 \quad \text{oder} \quad x = \frac{2}{3} \cdot r \quad \text{und}$$

$$V''(0) = 2h\pi > 0, \quad V''\left(\frac{2}{3} \cdot r\right) = -2h\pi < 0.$$

Für $x = \frac{2}{3} \cdot r$ besitzt V ein lokales Maximum, das gleichzeitig globales Maximum von V ist, denn $V(0) = V(r) = 0$ und $V\left(\frac{2}{3} \cdot r\right) = \frac{4r^2\pi h}{27} > 0$. Die Höhe des Zylinders beträgt $y = \frac{1}{3}h$.