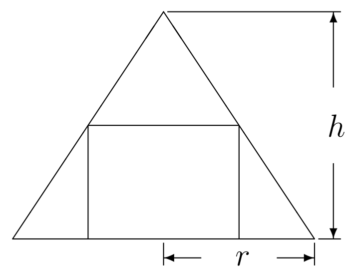
Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.42 Einem geraden Kreiskegel mit dem Radius r und der Höhe h soll ein gerader Kreiszylinder einbeschrieben werden (vgl. Zeichnung). **12/7/43/1**

Welche Abmessungen muß der Kreiszylinder haben, damit sein Volumen möglichst groß wird.



Lösungshinweis zu Aufgabe 7.42 Der Radius des Kreiszylinders beträgt $\frac{2}{3}\cdot r$ und seine Höhe $\frac{1}{3}\cdot h$. **12/7/43/2**

Lösung zu Aufgabe 7.42 Es sei x der Radius und y die Höhe des einbeschriebenen Zylinders. Sein Volumen beträgt $V = x^2\pi y$. Der Punkt (x, y), der die obere rechte Ecke des Zylinders (in der Seitenansicht – vgl. Zeichnung) markiert, genügt der Gleichung $y = -\frac{h}{r}\cdot x + h$. **12/7/43/3**

Folglich ist

$$V(x) = x^2\pi(-\tfrac{h}{r}\cdot x + h) = -\tfrac{h\pi}{r}\cdot x^3 + h\pi x^2.$$

Wir suchen ein globales Maximum von V. Dazu untersuchen wir V auf lokale Extrema. Es ist

$$V'(x) = h\pi x\cdot(2 - \tfrac{3}{r}\cdot x) \quad \text{und} \quad V''(x) = 2h\pi\cdot(1 - \tfrac{3}{r}\cdot x).$$

Weiterhin gilt:

$$V'(x) = 0 \iff x = 0 \;\text{ oder }\; x = \tfrac{2}{3}\cdot r \quad \text{und}$$

$$V''(0) = 2h\pi > 0, \quad V''(\tfrac{2}{3}\cdot r) = -2h\pi < 0.$$

Für $x = \frac{2}{3}\cdot r$ besitzt V ein lokales Maximum, das gleichzeitig globales Maximum von V ist, denn $V(0) = V(r) = 0$ und $V(\frac{2}{3}\cdot r) = \frac{4r^2\pi h}{27} > 0$.i Die Höhe des Zylinders beträgt $y = \frac{1}{3}h$.