

## Kapitel 12 Aufgabensammlung

### 12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

**7.43**  $n$  und  $k$  seien gegebene ganze Zahlen. Für welche Werte von  $n$  und  $k$  läßt sich  $n$  in eine Summe von zwei ganzen Zahlen  $x, y$  zerlegen, so daß bezüglich aller Zerlegungen  $n = x + y$  der Ausdruck  $x^k + y^k$  einen möglichst kleinen Wert besitzt? 12/7/44/1

**Lösungshinweis zu Aufgabe 7.43** Sei  $n = x + y$ , also  $y = n - x$ . 12/7/44/2

1. Fall:  $n = 0$ . Für  $k = 0$  realisiert jedes  $x \neq 0$  das globale Minimum.  
Sei jetzt  $k \neq 0$ . Für gerade  $k$  realisiert  $x = y = 0$  und für ungerade  $k$  jede Zerlegung das globale Minimum.

2. Fall:  $n \neq 0$ . Für  $k \in \{0, 1\}$  realisiert jede Zerlegung  $n = x + y$  mit  $x, y \neq 0$  das globale Minimum.

Für  $k \notin \{0, 1\}$  und gerade  $n$  realisiert  $x = y = \frac{n}{2}$  das globale Minimum.

Für ungerade  $n$  existiert keine Lösung.

**Lösung zu Aufgabe 7.43** Wegen  $n = x + y$  ist  $y = n - x$ . Wir suchen ein globales Minimum von 12/7/44/3

$$f(x) = x^k + y^k = x^k + (n - x)^k.$$

Da „0<sup>0</sup>“ nicht definiert ist, erscheint eine Fallunterscheidung hilfreich.

(i) Sei  $n = 0$ , also  $y = -x$  und somit  $f(x) = x^k + (-x)^k$ .

Für  $k = 0$  scheidet der Fall  $x = 0$  (als zulässige Zerlegung) aus.

Für  $x \neq 0$  ist  $f(x) = 2$ , d.h., jede Zerlegung  $0 = x - x$  mit  $x \neq 0$  realisiert das globale Minimum.

Sei jetzt  $k \neq 0$ . Ist  $k$  ungerade, so ist  $f(x) = x^k - x^k = 0$ . Damit realisiert jede Zerlegung das globale Minimum. Ist  $k$  gerade, so ist  $f(x) = 2x^k$ . Folglich realisiert  $x = y = 0$  das globale Minimum.

(ii) Es sei jetzt  $n \neq 0$ .

Für  $k = 0$  ist  $f(x) = x^0 + (n - x)^0$ . Damit scheiden die Zerlegungen  $x = 0, y = n$  und  $x = n, y = 0$  aus. Für  $y = n - x$  und  $x, y \neq 0$  ist  $f$  konstant. Folglich realisiert jede solche Zerlegung das globale Minimum.

Für  $k = 1$  ist  $f(x) = n$ ; somit realisiert jede Zerlegung das globale Minimum.

Es bleiben jetzt noch die Fälle  $n \neq 0$  und  $k \neq 0, k \neq 1$  zu betrachten. Hierzu untersuchen wir  $f(x) = x^k + (n - x)^k$  auf lokale Extrema. Es ist

$$f'(x) = k(x^{k-1} - (n - x)^{k-1}) \quad \text{und} \quad f''(x) = k(k - 1)(x^{k-2} + (n - x)^{k-2}).$$

Weiterhin ist

$$f'(x) = 0 \iff x^{k-1} = (n - x)^{k-1} \iff \begin{cases} 1 = \left(\frac{n}{x} - 1\right)^{k-1}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 = n^{k-1} \neq 0 \quad \text{!} & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Also  $1 = \frac{n}{x} - 1$  und somit  $x = \frac{n}{2}$ . Für gerades  $k - 1$  entsteht noch die Lösung  $1 = -(\frac{n}{x} - 1)$  und somit  $n = 0$ ; dieser Fall ist aber ausgeschlossen. Als einzige Lösung bleibt  $x = \frac{n}{2}$ .

$$f''(\frac{n}{2}) = 2k(k-1)\left(\frac{n}{2}\right)^{k-2}.$$

Hieraus ergeben sich folgende Schlußfolgerungen:

Wegen  $x \in \mathbb{Z}$  muß  $n$  gerade sein. Da  $k \neq 0$ ,  $k \neq 1$  und  $k \in \mathbb{Z}$  ist, gilt  $k(k-1) > 0$ . Folglich ist für  $n > 0$  stets  $f''(\frac{n}{2}) > 0$ .

Für gerade  $n > 0$  realisiert  $x = \frac{n}{2}$  und  $y = n - x = \frac{n}{2}$  das globale Minimum.

Sei jetzt  $n < 0$  ( $n$  gerade). Dann ist  $f''(\frac{n}{2}) > 0$  für gerade  $k$  und  $f''(\frac{n}{2}) < 0$  für ungerade  $k$ . Folglich realisiert  $x = \frac{n}{2}$ ,  $y = \frac{n}{2}$  das globale Minimum. Für ungerade  $n$  existiert keine Lösung.