Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.43 n und k seien gegebene ganze Zahlen. Für welche Werte von n und k läßt sich n in eine Summe von zwei ganzen Zahlen x, y zerlegen, so daß bezüglich aller Zerlegungen $n = x + y$ der Ausdruck $x^k + y^k$ einen möglichst kleinen Wert besitzt? **12/7/44/1**

Lösung zu Aufgabe 7.43 Die durch $(1, 2)$ gehende Gerade schneide die x-Achse im Punkt $(a, 0)$ und die y-Achse im Punkt $(0, b)$. Die Gleichung der Geraden ist dann gegeben durch $y = -\frac{b}{a} \cdot x + b$ und der Flächeninhalt des entstehenden Dreiecks durch $F = \frac{ab}{2}$. Aus der Geradengleichung erhält man für $x = 1$ und $y = 2$: $b = \frac{2a}{a-1}$. Folglich ist **12/7/45/3**

$$F = F(a) = \frac{a^2}{a-1}.$$

Weiterhin ist

$$F'(a) = \frac{a(a-2)}{(a-1)^2} \quad \text{und} \quad F''(a) = \frac{2}{(a-1)^3}$$

und somit

$$f'(a) = 0 \iff a = 0 \text{ oder } a = 2.$$

$a = 0$ scheidet als Lösung offenbar aus. Es ist $f''(2) = 2 > 0$. Folglich besitzt F an der Stelle $a = 2$ ein lokales Minimum, das gleichzeitig globales Minimum ist.
Aus $b = \frac{2a}{a-1}$ folgt: $b = 4$.

Die Gleichung der Geraden ist gegeben durch $y = -2x + 4$.