Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.44 In einem rechtwinkligen Koordinatensystem ist eine Gerade durch den Punkt $(1,2)$ so zu legen, daß sie mit den positiven Koordinatenachsen ein Dreieck mit möglichst kleinem Flächeninhalt einschließt. **12/7/45/1**
Geben Sie die Gleichung der Geraden an.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.43 Sei $n = x + y$, also $y = n - x$. **12/7/45/2**

1. Fall: $n = 0$. Für $k = 0$ realisiert jedes $x \neq 0$ das globale Minimum.
Sei jetzt $k \neq 0$. Für gerade k realisiert $x = y = 0$ und für ungerade k jede Zerlegung das globale Minimum.

2. Fall: $n \neq 0$. Für $k \in \{0,1\}$ realisiert jede Zerlegung $n = x + y$ mit $x, y \neq 0$ das globale Minimum.
Für $k \notin \{0,1\}$ und gerade n realisiert $x = y = \frac{n}{2}$ das globale Minimum.
Für ungerade n existiert keine Lösung.

Lösung zu Aufgabe 7.43 Die durch $(1,2)$ gehende Gerade schneide die x-Achse im Punkt $(a,0)$ und die y-Achse im Punkt $(0,b)$. Die Gleichung der Geraden ist dann gegeben durch $y = -\frac{b}{a} \cdot x + b$ und der Flächeninhalt des entstehenden Dreiecks durch $F = \frac{ab}{2}$. Aus der Geradengleichung erhält man für $x = 1$ und $y = 2$: $b = \dfrac{2a}{a-1}$. **12/7/45/3**
Folglich ist

$$F = F(a) = \frac{a^2}{a-1}.$$

Weiterhin ist

$$F'(a) = \frac{a(a-2)}{(a-1)^2} \quad \text{und} \quad F''(a) = \frac{2}{(a-1)^3}$$

und somit

$$f'(a) = 0 \iff a = 0 \text{ oder } a = 2.$$

$a = 0$ scheidet als Lösung offenbar aus. Es ist $f''(2) = 2 > 0$. Folglich besitzt F an der Stelle $a = 2$ ein lokales Minimum, das gleichzeitig globales Minimum ist.
Aus $b = \dfrac{2a}{a-1}$ folgt: $b = 4$.

Die Gleichung der Geraden ist gegeben durch $y = -2x + 4$.

7.43 n und k seien gegebene ganze Zahlen. Für welche Werte von n und k läßt sich n in eine Summe von zwei ganzen Zahlen x, y zerlegen, so daß bezüglich aller Zerlegungen $n = x + y$ der Ausdruck $x^k + y^k$ einen möglichst kleinen Wert besitzt? **12/7/44/1**