Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.45 In eine gegebene Halbkugel vom Radius R soll ein gerader Kegel einbeschrieben werden, dessen Spitze im Mittelpunkt der Grundfläche der Halbkugel liegt. **12/7/46/1**
Wie sind die Abmessungen des Kegels zu wählen, so daß sein Volumen möglichst groß wird?

Lösung zu Aufgabe 7.45 Der Radius des Kegels sei r und seine Höhe h. Dann gilt **12/7/46/3** offenbar $R^2 = r^2 + h^2$ und somit $r^2 = R^2 - h^2$. Das Volumen des Kegels beträgt $V = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 h$ und somit

$$V = V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot (R^2 h - h^3).$$

Wir suchen ein globales Maximum von V. Dazu untersuchen wir V zunächst auf lokale Extrema. Es ist

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} \cdot (R^2 - 3h^2) \quad \text{und} \quad V''(h) = -2\pi h.$$

Weiterhin gilt:

$$V'(h) = 0 \iff h = \pm \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

Der negative Wert von h scheidet offenbar als Lösung aus. Es genügt also $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$ zu betrachten. Es gilt:

$$V''\Big(\frac{R}{\sqrt{3}}\Big) = -\frac{2\pi R}{\sqrt{3}} < 0.$$

Folglich besitzt V an der Stelle $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$ ein lokales Maximum. Wegen $D(V) = [0, h]$ müssen zur Untersuchung eines globalen Maximums noch die Werte $V(0) = 0 = V(h)$ berücksichtigt werden. Da

$$V\Big(\frac{R}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \Big(\frac{R^3}{\sqrt{3}} - \frac{R^3}{3\sqrt{3}}\Big) = \frac{2\pi R^3}{9 \cdot \sqrt{3}} > V(0) = V(h)$$

besitzt f an der Stelle $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$ auch ein globales Maximum.
Die Abmessungen des Kegels sind gegeben durch

$$h = \frac{R}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R\,.$$