Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.46 Beim Kugelstoßen ist die Wurfweite **12/7/47/1**

$$w(\alpha) = \frac{v^2}{g} \cdot \cos\alpha\Big(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + \tfrac{2gh}{v^2}}\Big).$$

Dabei ist α der Abwurfwinkel, v die Abwurfgeschwindigkeit, h die Abwurfhöhe (sie beträgt etwa $\frac{6}{5}$ der Körperhöhe).
Für welchen Winkel α ist die Wurfweite am größten?
Zahlenbeispiel: $h = 2\,m,\ v = 11\,\frac{m}{s},\ g = 9,8\,\frac{m}{s^2}$.

Lösung zu Aufgabe 7.46 Abkürzend setzen wir $a := \dfrac{2gh}{v^2}$ und $b := \dfrac{v^2}{g}$ (offenbar sind $a, b \neq 0$). Dann ist **12/7/47/3**

$$w(\alpha) = b\cos\alpha\Big(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + a}\Big).$$

Wir suchen ein globales Maximum von w. Dazu untersuchen wir w auf lokale Extrema in dem Bereich $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (die übrigen Werte von α scheiden aus praktischen Gründen als Lösung aus). Es ist

$$w'(\alpha) = b\cdot\Big[-\sin\alpha\Big(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + a}\Big) + \cos\alpha\Big(\cos\alpha + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha + a}}\Big)\Big]$$

und

$$\begin{aligned}
w'(\alpha) = 0 \iff &\sqrt{\sin^2\alpha + a}\cdot(1 - 2\sin^2\alpha) = \sin\alpha(2\sin^2\alpha + a - 1)\\
&\Longrightarrow (2 + a)\sin^2\alpha = 1 \Longrightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{2 + a}\\
&\Longrightarrow \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2 + a}} = \pm\frac{V}{\sqrt{2(v^2 + gh)}}\\
&\Longrightarrow \alpha = \arcsin\Big(\pm\frac{1}{\sqrt{2 + a}}\Big). \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Der negative Wert von α liegt nicht im Definitionsbereich, folglich ist $\alpha \approx 0,6561$ oder $\alpha \approx 41°$.
Wir testen das Vorzeichen der 2. Ableitung an dieser Stelle. Es ist

$$w''(\alpha) = b \cdot \Bigg[\underbrace{-2\sin\alpha\Big(\cos\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2\cdot\sqrt{\sin^2\alpha + a}}\Big)}_{:= S_1} +$$

$$\underbrace{\cos\alpha}_{:=r}\Bigg(\underbrace{-2\sin\alpha}_{:=S_2}\underbrace{-\sqrt{\sin^2\alpha + a} + \frac{\cos 2\alpha\cdot\sqrt{\sin^2\alpha + a} - \frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha + a}}}{\sin^2\alpha + a}}_{:= S_3}\Bigg)\Bigg].$$

Wegen $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ist offenbar $S_1 < 0,\ r > 0$ und somit $rS_2 < 0$. Es bleibt noch nachzuweisen, daß auch $S_3 < 0$.

Um uns die Schreibarbeit zu erleichtern, setzen wir $c := \sqrt{\sin^2\alpha + a}$ (>0). Dann ist wegen $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ und $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$:

$$\begin{aligned} S_3 &= -c + \tfrac{1}{c^2}\Big((1-2\sin^2\alpha)\cdot c - \frac{\sin^2\alpha\cdot(1-\sin^2\alpha)}{c}\Big) \\ &= \tfrac{1}{c^3}\Big(\underbrace{-c^4 + (1-2\sin^2\alpha)\cdot c^2 - \sin^2\alpha\cdot(1-\sin^2\alpha)}_{:=S_4}\Big). \end{aligned}$$

Wegen $\frac{1}{c^3} > 0$ genügt es nachzuweisen, daß $S_4 < 0$. Aufgrund von $(\star)$ ist $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{2+a}$ und somit

$$\begin{aligned} c^2 &= \sin^2\alpha + a = \tfrac{1}{a+2} + a = \frac{(a+1)^2}{a+2}, \quad \text{also} \\ S_4 &= -\tfrac{(a+1)^4}{(a+2)^2} + \Big(1 - \tfrac{2}{a+2}\Big)\cdot\tfrac{(a+1)^2}{a+2} - \tfrac{1}{a+2}\Big(1 - \tfrac{1}{a+2}\Big) \\ &= -\tfrac{1}{(a+2)^2}\Big((a+1)^4 - a(a+1)^2 + (a+1)\Big) \\ &= -\tfrac{a+1}{(a+2)^2}(a^3 + 2a^2 + 2a + 2) < 0. \end{aligned}$$

Folglich besitzt f an der Stelle α ein lokales Maximum, das gleichzeitig globales Maximum ist.