

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.46 Beim Kugelstoßen ist die Wurfweite

12/7/47/1

$$w(\alpha) = \frac{v^2}{g} \cdot \cos \alpha \left(\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{2gh}{v^2}} \right).$$

Dabei ist α der Abwurfwinkel, v die Abwurfgeschwindigkeit, h die Abwurfhöhe (sie beträgt etwa $\frac{6}{5}$ der Körperhöhe).

Für welchen Winkel α ist die Wurfweite am größten?

Zahlenbeispiel: $h = 2 \text{ m}$, $v = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.46 Es ist $w'(\alpha) = 0 \iff \alpha = \arcsin \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2+a}} \right)$. 12/7/47/2

Der negative Wert scheidet aus praktischen Gründen aus.

$$w''(\alpha) = b \cdot \left[\underbrace{-2 \sin \alpha \left(\cos \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2 \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha + a}} \right)}_{:=S_1} + \underbrace{\cos \alpha \left(\underbrace{-2 \sin \alpha}_{:=S_2} - \sqrt{\sin^2 \alpha + a} + \frac{\cos 2\alpha \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha + a} - \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + a}}}{\sin^2 \alpha + a} \right)}_{:=S_3} \right].$$

Man zeigt: $w''(\alpha) < 0$; folglich besitzt f an der Stelle $\alpha \approx 0,6561$ oder $\alpha \approx 41^\circ$ ein (globales) Maximum. (Die Lösung der Aufgabe ist technisch recht aufwendig.)

Lösung zu Aufgabe 7.46 Abkürzend setzen wir $a := \frac{2gh}{v^2}$ und $b := \frac{v^2}{g}$ (offenbar sind $a, b \neq 0$). Dann ist 12/7/47/3

$$w(\alpha) = b \cos \alpha \left(\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + a} \right).$$

Wir suchen ein globales Maximum von w . Dazu untersuchen wir w auf lokale Extrema in dem Bereich $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (die übrigen Werte von α scheiden aus praktischen Gründen als Lösung aus). Es ist

$$w'(\alpha) = b \cdot \left[-\sin \alpha \left(\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + a} \right) + \cos \alpha \left(\cos \alpha + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + a}} \right) \right]$$

und

$$w'(\alpha) = 0 \iff \sqrt{\sin^2 \alpha + a} \cdot (1 - 2 \sin^2 \alpha) = \sin \alpha (2 \sin^2 \alpha + a - 1)$$

$$\implies (2+a) \sin^2 \alpha = 1 \implies \sin^2 \alpha = \frac{1}{2+a}$$

$$\implies \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2+a}} = \pm \frac{V}{\sqrt{2(v^2+gh)}}$$

$$\implies \alpha = \arcsin \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2+a}} \right). \quad (\star)$$

Der negative Wert von α liegt nicht im Definitionsbereich, folglich ist $\alpha \approx 0,6561$ oder $\alpha \approx 41^\circ$.

Wir testen das Vorzeichen der 2. Ableitung an dieser Stelle. Es ist

$$w''(\alpha) = b \cdot \left[\underbrace{-2 \sin \alpha \left(\cos \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2 \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha + a}} \right)}_{:= S_1} + \underbrace{\cos \alpha}_{:= r} \left(\underbrace{-2 \sin \alpha}_{:= S_2} - \underbrace{\sqrt{\sin^2 \alpha + a} + \frac{\cos 2\alpha \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha + a} - \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + a}}}{\sin^2 \alpha + a}}_{:= S_3} \right) \right].$$

Wegen $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ist offenbar $S_1 < 0$, $r > 0$ und somit $rS_2 < 0$. Es bleibt noch nachzuweisen, daß auch $S_3 < 0$.

Um uns die Schreibarbeit zu erleichtern, setzen wir $c := \sqrt{\sin^2 \alpha + a}$ (> 0). Dann ist wegen $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ und $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$:

$$\begin{aligned} S_3 &= -c + \frac{1}{c^2} \left((1 - 2 \sin^2 \alpha) \cdot c - \frac{\sin^2 \alpha \cdot (1 - \sin^2 \alpha)}{c} \right) \\ &= \frac{1}{c^3} \left(\underbrace{-c^4 + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \cdot c^2 - \sin^2 \alpha \cdot (1 - \sin^2 \alpha)}_{:= S_4} \right). \end{aligned}$$

Wegen $\frac{1}{c^3} > 0$ genügt es nachzuweisen, daß $S_4 < 0$. Aufgrund von (\star) ist $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2+a}$ und somit

$$\begin{aligned} c^2 &= \sin^2 \alpha + a = \frac{1}{a+2} + a = \frac{(a+1)^2}{a+2}, \text{ also} \\ S_4 &= -\frac{(a+1)^4}{(a+2)^2} + \left(1 - \frac{2}{a+2}\right) \cdot \frac{(a+1)^2}{a+2} - \frac{1}{a+2} \left(1 - \frac{1}{a+2}\right) \\ &= -\frac{1}{(a+2)^2} \left((a+1)^4 - a(a+1)^2 + (a+1) \right) \\ &= -\frac{a+1}{(a+2)^2} (a^3 + 2a^2 + 2a + 2) < 0. \end{aligned}$$

Folglich besitzt f an der Stelle α ein lokales Maximum, das gleichzeitig globales Maximum ist.