Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.47 Ein Gefäß mit senkrechter Wandung stehe auf einer horizontalen Ebene. Seine Höhe sei h. Aus einer (waagerechten) Öffnung in der Gefäßwand dringe ein Flüssigkeitsstrahl. **12/7/48/1**
Man bestimme die Lage der Öffnung, für die der Strahl die größte Weite erzielt, wenn die Geschwindigkeit der ausströmenden Flüssigkeit nach dem Gesetz von TORRICELLI gleich $\sqrt{2gx}$ ist, wobei x die Höhe der Öffnung unter dem Flüssigkeitsspiegel angibt.

Lösung zu Aufgabe 7.47 Sei u die Austrittshöhe des Strahls aus der Gefäßwand, also $x = h - u$. Dann ist die Austrittsgeschwindigkeit $v = \sqrt{2g(h-u)}$. **12/7/48/3**
Die Wurfparabel (waagerechter Wurf in einem x-y-Koordinatensystem) ist gegeben durch $y = -\frac{g}{2v^2} \cdot x^2$. Für $y = -u$ trifft der Strahl offenbar auf die horizontale Ebene auf. Daraus ergibt sich die Weite x des Strahls wie folgt:

$$-u = -\frac{g}{2v^2} \cdot x^2 \iff x^2 = \frac{2uv^2}{g} = 4(hu - u^2), \text{ also}$$

$$x = x(u) = 2\sqrt{hu - u^2}.$$

Wir suchen ein globales Maximum von $x(u)$. Dazu untersuchen wir $x(u)$ auf lokale Extrema. Es ist

$$x'(u) = \frac{h-2u}{\sqrt{hu-u^2}}, \quad x''(u) = \frac{-4(hu-u^2) - (h-2u)^2}{2 \cdot \sqrt{(hu-u^2)^3}} \quad \text{und}$$

$$x'(u) = 0 \iff u = \frac{h}{2}.$$

Weiterhin ist

$$x''\Big(\frac{h}{2}\Big) = \frac{-h^2}{2 \cdot \sqrt{(\frac{h^2}{4})^3}} = -\frac{4}{h} < 0.$$

Folglich besitzt $x(u)$ an der Stelle $u = \frac{h}{2}$ ein lokales Maximum der Größe $x\Big(\frac{h}{2}\Big) = h$. Der Definitionsbereich von $v(u)$ ist $[0, h]$. Vergleicht man $x\Big(\frac{h}{2}\Big)$ mit $x(0) = 0 = x(h)$, so ergibt sich, daß x an der Stelle $\frac{h}{2}$ ein globales Maximum besitzt.