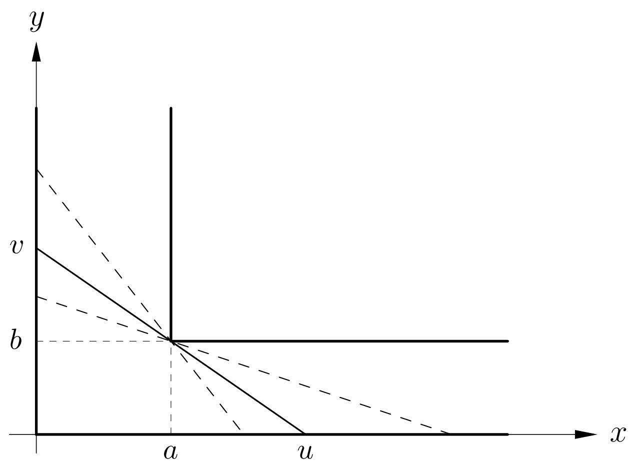
Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.48 Von einem Kanal der Breite a gehe unter einem rechten Winkel ein anderer Kanal mit der Breite b aus. Die Wände der Kanäle seien geradlinig. **12/7/49/1**
Wie lang darf ein Balken (dessen Breite unberücksichtigt bleibt) höchstens sein, der von einem Kanal in den anderen geflößt werden soll?

Lösung zu Aufgabe 7.48 **12/7/49/3**



Die Zeichnung symbolis ineinander übergehenden mit den zugehörigen B bzw. b und die möglichen der Balken, die von dem den anderen Kanal geflöß sollen.

Der längste Balken, der gefloßt werden kann, werde durch die Strecke A zwischen $(u,0)$ und $(0,v)$ dargestellt. Die Gleichung der Geraden durch die Punkte $(u,0)$, $(0,v)$ (auf der auch (a,b) liegen soll) ist gegeben durch $y = -\frac{v}{u}\cdot x + v$. Da (a,b) auf der Geraden liegt, erhält man

$$b = -\frac{v}{u}\cdot a + v \quad \text{und somit} \quad v = \frac{bu}{u-a}.$$

Die Länge des Balkens beträgt

$$l(u) = \sqrt{u^2+v^2} = \sqrt{u^2 + \frac{b^2u^2}{(u-a)^2}} := A.$$

Der längste noch zu flößende Balken wird durch das globale Minimum (vgl. Zeichnung) von $l(u)$ gegeben. Wir bilden

$$l'(u) = \frac{2u + \frac{2b^2u(u-a)-2b^2u^2}{(u-a)^3}}{2A} = \frac{u\cdot\Big((u-a)^3 - b^2a\Big)}{(u-a)^3\cdot A}\,.$$

Es ist

$$l'(u) = 0 \iff u = 0 \;\text{ oder }\; u = \sqrt[3]{b^2a} + a.$$

$u = 0$ scheidet als Lösung offenbar aus; es bleibt $u = u_0 = \sqrt[3]{b^2a} + a$ zu berücksichtigen.

Da die 2. Ableitung relativ kompliziert zu handhaben ist, benutzen wir zum Nachweis eines Minimums andere Hilfsmittel.

Wir zeigen: In einer linksseitigen bzw. rechtsseitigen Umgebung von u_0 ist $l(u)$ streng monoton fallend bzw. wachsend. Aufgrund ihrer Stetigkeit besitzt die Funktion $l(u)$ an der Stelle u_0 dann ein lokales Minimum.

Sei $0 < \varepsilon < \min\{1, \sqrt[3]{b^2a}\}$.

1. Fall: $u = u_0 + \varepsilon$.
Dann ist $u - a = \sqrt[3]{b^2a} + \varepsilon > 0$, also auch $(u-a)^3 > 0$ und somit $(u-a)^3 \cdot A > 0$.
Wegen $(u-a)^3 - b^2a = \left(\sqrt[3]{b^2a} + \varepsilon\right)^3 - b^2a > 0$ ist auch $l'(u) > 0$. Folglich ist $l(u)$ in einer rechtsseitigen Umgebung von u_0 streng monoton wachsend.

2. Fall: $u = u_0 - \varepsilon$.
Dann ist $u - a = \sqrt[3]{b^2a} - \varepsilon > 0$, also auch $(u-a)^3 > 0$ und somit $(u-a)^3 \cdot A > 0$.
Wegen

$$\begin{aligned}(u-a)^3 - b^2a &= \left(\sqrt[3]{b^2a} - \varepsilon\right)^3 - b^2a \\ &= -3\cdot\left(\sqrt[3]{b^2a}\right)^2\cdot\varepsilon + 3\cdot\sqrt[3]{b^2a}\cdot\varepsilon^2 - \varepsilon^3 \\ &= -\varepsilon\Big(3\cdot\sqrt[3]{b^2a}(\sqrt[3]{b^2a} - \varepsilon) + \varepsilon^2\Big) < 0\end{aligned}$$

ist $l(u)$ in einer linksseitigen Umgebung von u_0 streng monoton fallend. Damit erweist sich $l(u_0)$ schließlich auch als globales Minimum von l mit der Größe

$$l(u_0) = \tfrac{u_0}{u_0 - a}\cdot\sqrt{(u_0-a)^2 + b^2}.$$