

Kapitel 12 Aufgabensammlung

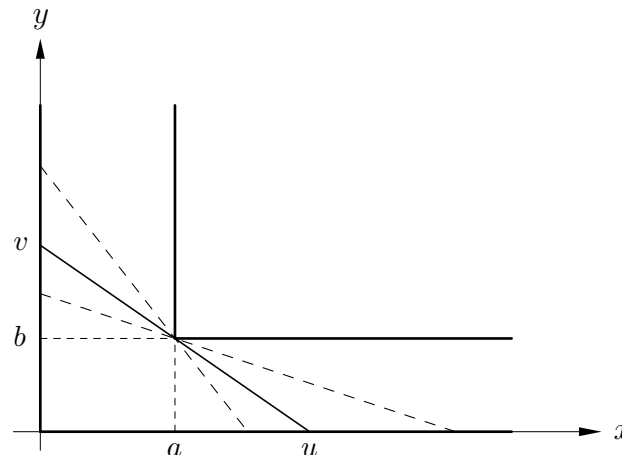
12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

- 7.48 Von einem Kanal der Breite a gehe unter einem rechten Winkel ein anderer Kanal mit der Breite b aus. Die Wände der Kanäle seien geradlinig. Wie lang darf ein Balken (dessen Breite unberücksichtigt bleibt) höchstens sein, der von einem Kanal in den anderen gefloßt werden soll? 12/7/49/1

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.48 Es sei $u_0 = \sqrt[3]{b^2 \cdot a} + a$ (u_0 ist die kritische Stelle der Funktion, von der die Länge des Balkens abhängt.) 12/7/49/2

Die maximale Länge des Balkens beträgt $\frac{u_0}{u_0 - a} \cdot \sqrt{(u_0 - a)^2 + b^2}$.

Lösung zu Aufgabe 7.48



12/7/49/3

Die Zeichnung symbolisiert zwei ineinander übergehende Kanäle mit den zugehörigen Breiten a bzw. b und die möglichen Längen l der Balken, die von dem einen in den anderen Kanal gefloßt werden sollen.

Der längste Balken, der gefloßt werden kann, werde durch die Strecke A zwischen $(u, 0)$ und $(0, v)$ dargestellt. Die Gleichung der Geraden durch die Punkte $(u, 0)$, $(0, v)$ (auf der auch (a, b) liegen soll) ist gegeben durch $y = -\frac{v}{u} \cdot x + v$. Da (a, b) auf der Geraden liegt, erhält man

$$b = -\frac{v}{u} \cdot a + v \quad \text{und somit} \quad v = \frac{bu}{u - a}.$$

Die Länge des Balkens beträgt

$$l(u) = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{u^2 + \frac{b^2 u^2}{(u-a)^2}} := A.$$

Der längste noch zu fließende Balken wird durch das globale Minimum (vgl. Zeichnung) von $l(u)$ gegeben. Wir bilden

$$l'(u) = \frac{2u + \frac{2b^2 u(u-a) - 2b^2 u^2}{(u-a)^3}}{2A} = \frac{u \cdot ((u-a)^3 - b^2 a)}{(u-a)^3 \cdot A}.$$

Es ist

$$l'(u) = 0 \iff u = 0 \quad \text{oder} \quad u = \sqrt[3]{b^2 a} + a.$$

$u = 0$ scheidet als Lösung offenbar aus; es bleibt $u = u_0 = \sqrt[3]{b^2a} + a$ zu berücksichtigen. Da die 2. Ableitung relativ kompliziert zu handhaben ist, benutzen wir zum Nachweis eines Minimums andere Hilfsmittel.

Wir zeigen: In einer linksseitigen bzw. rechtsseitigen Umgebung von u_0 ist $l(u)$ streng monoton fallend bzw. wachsend. Aufgrund ihrer Stetigkeit besitzt die Funktion $l(u)$ an der Stelle u_0 dann ein lokales Minimum.

Sei $0 < \varepsilon < \min\{1, \sqrt[3]{b^2a}\}$.

1. Fall: $u = u_0 + \varepsilon$.

Dann ist $u - a = \sqrt[3]{b^2a} + \varepsilon > 0$, also auch $(u - a)^3 > 0$ und somit $(u - a)^3 \cdot A > 0$.

Wegen $(u - a)^3 - b^2a = (\sqrt[3]{b^2a} + \varepsilon)^3 - b^2a > 0$ ist auch $l'(u) > 0$. Folglich ist $l(u)$ in einer rechtsseitigen Umgebung von u_0 streng monoton wachsend.

2. Fall: $u = u_0 - \varepsilon$.

Dann ist $u - a = \sqrt[3]{b^2a} - \varepsilon > 0$, also auch $(u - a)^3 > 0$ und somit $(u - a)^3 \cdot A > 0$. Wegen

$$\begin{aligned} (u - a)^3 - b^2a &= (\sqrt[3]{b^2a} - \varepsilon)^3 - b^2a \\ &= -3 \cdot (\sqrt[3]{b^2a})^2 \cdot \varepsilon + 3 \cdot \sqrt[3]{b^2a} \cdot \varepsilon^2 - \varepsilon^3 \\ &= -\varepsilon(3 \cdot \sqrt[3]{b^2a}(\sqrt[3]{b^2a} - \varepsilon) + \varepsilon^2) < 0 \end{aligned}$$

ist $l(u)$ in einer linksseitigen Umgebung von u_0 streng monoton fallend. Damit erweist sich $l(u_0)$ schließlich auch als globales Minimum von l mit der Größe

$$l(u_0) = \frac{u_0}{u_0 - a} \cdot \sqrt{(u_0 - a)^2 + b^2}.$$