Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.49 Es sei $\mathfrak{k} := \{(t, t^2) \in \mathbb{R} : t \in \mathbb{R}\}$. **12/7/50/1**
Bestimmen Sie den Punkt von $\mathfrak{k}$, der dem Punkt $(6, 3) \in \mathbb{R}$ am nächsten liegt (falls ein solcher existiert).

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.49 Der minimale Abstand beträgt $\sqrt{17}$. **12/7/50/2**

Lösung zu Aufgabe 7.49 Der Abstand $A(t)$ der Punkte (t, t^2) und $(6, 3)$ beträgt **12/7/50/3**
$A(t) = \sqrt{(t-6)^2 + (t^2-3)^2}$. Wir suchen ein globales Minimum von $A(t)$. Dazu untersuchen wir $A(t)$ zunächst auf lokale Extrema. Es ist

$$A'(t) = \frac{2t^3 - 5t - 6}{\sqrt{(t-6)^2 + (t^2-3)^2}} \quad \text{und}$$

$$A''(t) = \frac{(6t^2 - 5)\sqrt{(t-6)^2 + (t^2-3)^2} - \frac{(2t^3-5t-6)^2}{\sqrt{(t-6)^2+(t^2-3)^2}}}{(t-6)^2 + (t^2-3)^2}.$$

Es ist

$$A'(t) = 0 \iff 2t^3 - 5t - 6 = 0.$$

Eine Lösung $t = 2$ läßt sich erraten. Division von $2t^3 - 5t - 6$ durch $t - 2$ ergibt das quadratische Polynom $2t^2 + 4t + 3$, das keine (reelle) Nullstelle besitzt. Folglich ist $t = 2$ einzige Nullstelle von $A'(t)$. Es gilt:

$$A''(2) = \frac{19 \cdot \sqrt{17}}{17} > 0.$$

Damit besitzt $A(t)$ an der Stelle $t = 2$ ein lokales Minimum, das gleichzeitig globales Minimum ist, und es gilt: $A(2) = \sqrt{17}$.