

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.50 Eine zylinderförmige Blechbüchse mit einem Liter Inhalt soll mit möglichst wenig Materialaufwand hergestellt werden (Oberfläche minimal). Geben Sie die Abmessungen einer solchen Büchse an. 12/7/51/1

Lösung zu Aufgabe 7.50 Es sei r der Radius und h die Höhe der Blechbüchse. Die Oberfläche beträgt dann $O = 2r^2\pi + 2r\pi h$ und das Volumen $V = r^2\pi h = 1$. Hieraus läßt sich h in Abhängigkeit von r bestimmen: $h = \frac{1}{\pi r^2}$. Damit erhält man 12/7/51/3

$$O = O(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}.$$

Wir suchen ein globales Minimum von O . Dazu untersuchen wir $O(r)$ zunächst auf lokale Extrema. Es ist

$$O'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2} \quad \text{und} \quad O''(r) = 4\pi + \frac{4}{r^3}.$$

Dann gilt:

$$O'(r) = 0 \iff r^3 = \frac{1}{2\pi} \iff r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \quad \text{und}$$

$$O''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right) = 4\pi + \frac{4}{2\pi} > 0.$$

Folglich besitzt O an der Stelle $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ ein lokales Minimum, das gleichzeitig globales Minimum ist. Mit $h = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{(\sqrt[3]{2\pi})^2}{\pi}$ erhält man auch die Höhe der Büchse. Offenbar ist $\frac{r}{h} = \frac{1}{2}$ und $O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right) = 2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi^2}} + 2 \cdot \sqrt[3]{2\pi} = 3 \cdot \sqrt[3]{2\pi}$.