Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.50 Eine zylinderförmige Blechbüchse mit einem Liter Inhalt soll mit möglichst wenig Materialaufwand hergestellt werden (Oberfläche minimal). **12/7/51/1**
Geben Sie die Abmessungen einer solchen Büchse an.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.50 Es sei r der Radius und h die Höhe der Blechbüchse. **12/7/51/2**
Durch $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ und $h = \frac{1}{\pi r^2}$ sind die Abmessungen der Büchse gegeben.

Lösung zu Aufgabe 7.50 Es sei r der Radius und h die Höhe der Blechbüchse. Die **12/7/51/3**
Oberfläche beträgt dann $O = 2r^2\pi + 2r\pi h$ und das Volumen $V = r^2\pi h = 1$. Hieraus läßt sich h in Abhängigkeit von r bestimmen: $h = \frac{1}{\pi r^2}$. Damit erhält man

$$O = O(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}.$$

Wir suchen ein globales Minimum von O. Dazu untersuchen wir $O(r)$ zunächst auf lokale Extrema. Es ist

$$O'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2} \quad \text{und} \quad O''(r) = 4\pi + \frac{4}{r^3}.$$

Dann gilt:

$$O'(r) = 0 \iff r^3 = \frac{1}{2\pi} \iff r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \quad \text{und}$$

$$O''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right) = 4\pi + \frac{4}{2\pi} > 0.$$

Folglich besitzt O an der Stelle $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ ein lokales Minimum, das gleichzeitig globales Minimum ist. Mit $h = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{(\sqrt[3]{2\pi})^2}{\pi}$ erhält man auch die Höhe der Büchse. Offenbar ist $\frac{r}{h} = \frac{1}{2}$ und $O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right) = 2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}^2} + 2 \cdot \sqrt[3]{2\pi} = 3 \cdot \sqrt[3]{2\pi}$.