Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.51 Die Magnetisierungskurve von Eisen ist nach KOEPPEL durch $B = \mathrm{e}^{\frac{H}{a+bH}}$ gegeben **12/7/52/1**
(H ist die magnetische Feldstärke, B die Induktion, a, b sind Konstanten).
Für welchen Wert von H hat die Permeabilität $\mu = \frac{B}{H}$ einen größten bzw. kleinsten Wert?

Lösung zu Aufgabe 7.51 Wir suchen Extrema von $\mu(H) = \frac{B}{H}$, wobei $B = \mathrm{e}^{\frac{H}{a+bH}}$, **12/7/52/3**
$D(\mu) = \mathbb{R} \setminus \{0, -\frac{a}{b}\}$ (falls $b \neq 0$) und a, b nicht beide null sind.

Wenn $a = 0$, so $\mu(H) = \frac{1}{H} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{b}}$. Folglich besitzt $\mu(H)$ kein Extremum.

Von nun an sei $a \neq 0$.

Ist $b = 0$, so $D(\mu) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\mu(H) = \frac{1}{H} \cdot \mathrm{e}^{\frac{H}{a}}$. Weiterhin ist

$$\mu'(H) = \mathrm{e}^{\frac{H}{a}} \cdot \frac{1}{H} \cdot \Big(\frac{1}{a} - \frac{1}{H}\Big) \quad \text{und} \quad \mu''(H) = \mathrm{e}^{\frac{H}{a}} \cdot \frac{1}{aH} \cdot \Big(\frac{2a}{H^2} - \frac{2}{H} + \frac{1}{a}\Big).$$

Folglich ist

$$\mu'(H) = 0 \iff H = a \quad \text{und} \quad \mu''(H) = \frac{\mathrm{e}}{a^3}.$$

Für $a < 0$ ist $\mu''(a) < a$ und somit $\mu(a)$ ein lokales Maximum; für $a > 0$ ist $\mu''(a) > 0$ und somit $\mu(a)$ ein lokales Minimum. Offenbar sind dies auch globale Extrema.

Sei jetzt stets $b \neq 0$ (also $a \neq 0$ und $b \neq 0$). Dann ist

$$\begin{aligned}\mu'(H) &= B \cdot \Big(\frac{a}{H(a+bH)^2} - \frac{1}{H^2}\Big)\\ &= \underbrace{-\frac{B}{H^2(a+bH)^2}}_{:=f(H)} \cdot \Big(\underbrace{-aH + (a+bH)^2}_{:=p(H)}\Big)\end{aligned}$$

und

$$\mu'(H) = 0 \iff p(H) = 0 \iff H = \frac{a}{2b^2} \cdot \Big(1 - 2b \pm \sqrt{1-4b}\Big).$$

Für $b > \frac{1}{4}$ besitzt $\mu'(H)$ keine (reelle) Nullstelle und damit auch kein (lokales oder globales) Extremum.

Sei jetzt $b \leq \frac{1}{4}$.

Da der Umgang mit der 2. Ableitung von μ relativ kompliziert ist, benutzen wir zum Nachweis lokaler Extrema andere Hilfsmittel.

Wegen $\mu'(H) = f(H) \cdot p(H)$ und $f(H) < 0$ für alle H hängt das Vorzeichen von $\mu'(H)$ nur von $p(H)$ ab. Es seien

$$H_1 = \frac{a}{2b^2} \cdot \Big(1 - 2b - \sqrt{1-4b}\Big) \quad \text{und} \quad H_2 = \frac{a}{2b^2} \cdot \Big(1 - 2b + \sqrt{1-4b}\Big).$$

Wenn $b = \frac{1}{4}$, so $H_1 = H_2 = 4a$ und $p(H) \geq 0$ für alle H und $p(H) = 0 \iff H = 4a$. Folglich ist $\mu(H)$ im gesamten Definitionsbereich streng monoton fallend (die Vorzeichen von $\mu'(H)$ und $p(H)$ sind entgegengesetzt), besitzt also kein Extremum.

Es bleibt $b < \frac{1}{4}$ zu betrachten.

Für $a > 0$ ist $0 < H_1 < H_2$ und für $a < 0$ ist $H_2 < H_1 < 0$. Durch eine einfache Abschätzung zeigt man, daß $-\frac{a}{b}$ (Definitionslücke von $\mu(H)$) nicht zwischen H_1 und H_2 liegt.

Sei zunächst $a > 0$. Dann ist offenbar $p(H)$ in einer linksseitigen Umgebung $U_l(H_1)$ positiv und in einer rechtsseitigen Umgebung $U_r(H_1)$ negativ. Folglich ist $\mu(H)$ in $U_l(H_1)$ streng monoton fallend und in $U_r(H_1)$ streng monoton wachsend. $\mu(H)$ besitzt also an der Stelle H_1 ein lokales Minimum. Analog zeigt man, daß $\mu(H)$ an der Stelle H_2 ein lokales Maximum besitzt. Wegen

$$\lim_{\substack{H \to 0 \\ H > 0}} \mu(H) = \infty, \quad \lim_{h \to \infty} \mu(H) = 0 \quad \text{und} \quad \mu(H_1) = \frac{1}{H_1} \cdot \mathrm{e}^{\frac{H_1}{a + bH_1}} > 0$$

hat $\mu(H)$ kein globales Extremum.

Für $a < 0$ besitzt $\mu(H)$ (analog wie oben) an der Stelle H_1 ein lokales Maximum und an der Stelle H_2 ein lokales Minimum. Wegen

$$\lim_{\substack{H \to 0 \\ H < 0}} \mu(H) = -\infty, \quad \lim_{h \to -\infty} \mu(H) = 0 \quad \text{und} \quad \mu(H_1) = \frac{1}{H_1} \cdot \mathrm{e}^{\frac{H_1}{a + bH_1}} < 0$$

hat $\mu(H)$ kein globales Extremum.