Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.8 Differentialrechnung (mehrere Veränderliche)

8.1 Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. **12/8/1/1**
Man bilde (mit Hilfe der Kettenregel) die Ableitung von $f \circ g$, wobei:
(a) $f(x,y) = \sin(xy), \quad g(t) = (t, t^2)$.
(b) $f(x,y) = x\sin(xy), \quad g(t) = (t^2, \ln(t^2+1))$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 8.1 (a) $(f \circ g)'(t) = 3t^2 \cdot \cos(t^3)$. **12/8/1/2**

(b) $(f \circ g)'(t) = 2t \cdot \sin(t^2 \cdot \ln(t^2+1)) + \left(2t^3 \cdot \ln(t^2+1) + \frac{2t^5}{t^2+1}\right) \cdot \cos(t^2 \cdot \ln(t^2+1))$.

Lösung zu Aufgabe 8.1 Nach der Kettenregel (vgl. 8/1/32) gilt: **12/8/1/3**

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t) = f_x(g(t)) \cdot g_1'(t) + f_y(g(t)) \cdot g_2'(t).$$

(a) Für $f(x,y) = \sin(xy)$ und $g(t) = (t, t^2) = (g_1(t), g_2(t))$ gilt:

$$f_x(x,y) = \cos(xy) \cdot y, \quad f_y(x,y) = \cos(xy) \cdot x \quad \text{und} \quad g_1'(t) = 1, \ g_2'(t) = 2t.$$

Also

$$(f \circ g)'(t) = \cos(t^3) \cdot t^2 + \cos(t^3) \cdot t \cdot 2t = 3t^2 \cdot \cos(t^3).$$

(b) Für $f(x,y) = x \cdot \sin(xy)$ und $g(t) = (t^2, \ln(t^2+1)) = (g_1(t), g_2(t))$ gilt:

$$f_x(x,y) = \sin(xy) + xy \cdot \cos(xy), \quad f_y(x,y) = x^2 \cos(xy) \quad \text{und}$$
$$g_1'(t) = 2t, \ g_2'(t) = \frac{2t}{t^2+1}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(t) &= [\sin(t^2 \cdot \ln(t^2+1)) + t^2 \cdot \ln(t^2+1) \cdot \cos(t^2 \cdot \ln(t^2+1))] \cdot 2t \\ &\qquad + t^4 \cdot \cos(t^2 \cdot \ln(t^2+1)) \cdot \frac{2t}{t^2+1} \\ &= 2t \cdot \sin(t^2 \cdot \ln(t^2+1)) + \left(2t^3 \cdot \ln(t^2+1) + \frac{2t^5}{t^2+1}\right) \cdot \cos(t^2 \cdot \ln(t^2+1)).\end{aligned}$$