

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.8 Differentialrechnung (mehrere Veränderliche)

8.2 Bestimmen Sie die (totale) Ableitung der folgenden Funktionen: 12/8/2/1

- (a) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$, (c) $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$,
 (b) $f(x, y) = \ln \tan \frac{x}{y}$, (d) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Lösung zu Aufgabe 8.2 Sei $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, dann ist $f'(\bar{x}) = (f_{x_1}(\bar{x}), \dots, f_{x_n}(\bar{x}))$. 12/8/2/3

(a) Für $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ ist

$$f'(x, y) = (\cos(x^2 + y^2) \cdot 2x, \cos(x^2 + y^2) \cdot 2y).$$

(b) Für $f(x, y) = \ln \tan \frac{x}{y}$ ist

$$f_x(x, y) = \frac{1}{\tan \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{x}{y}} \quad \text{und}$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{\tan \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2 \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{x}{y}}.$$

Also

$$f'(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = \left(\frac{1}{y \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{x}{y}}, \frac{-x}{y^2 \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{x}{y}} \right).$$

(c) Für $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ ist

$$f_x(x, y) = \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{und}$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \cdot \left(\frac{-x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Folglich ist

$$f'(x, y) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2} \right).$$

(d) Für $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist

$$f_x(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \dots, f_z(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Also

$$f'(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot (x, y, z).$$