# Kapitel 12
# Aufgabensammlung

## 12.8 Differentialrechnung (mehrere Veränderliche)

**8.2** Bestimmen Sie die (totale) Ableitung der folgenden Funktionen: **12/8/2/1**

(a) $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$, (c) $f(x,y) = \arctan\frac{x}{y}$,

(b) $f(x,y) = \ln\tan\frac{x}{y}$, (d) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

**Lösungshinweis zu Aufgabe 8.2** (a) $f'(x,y) = \Big(\cos(x^2+y^2)\cdot 2x,\ \cos(x^2+y^2)\cdot 2y\Big)$. **12/8/2/2**

(b) $f'(x,y) = \Big(\frac{1}{y\cdot\sin\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{x}{y}},\ \frac{-x}{y^2\cdot\sin\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{x}{y}}\Big)$.

(c) $f'(x,y) = \Big(\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{-x}{x^2+y^2}\Big)$.

(d) $f'(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot(x,y,z)$.

**Lösung zu Aufgabe 8.2** Sei $\overline{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, dann ist $f'(\overline{x}) = (f_{x_1}(\overline{x}),\ldots,f_{x_n}(\overline{x}))$. **12/8/2/3**

(a) Für $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ ist

$$f'(x,y) = \Big(\cos(x^2+y^2)\cdot 2x,\ \cos(x^2+y^2)\cdot 2y\Big).$$

(b) Für $f(x,y) = \ln\tan\frac{x}{y}$ ist

$$f_x(x,y) = \frac{1}{\tan\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{y\cdot\sin\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{x}{y}} \quad \text{und}$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{\tan\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2\cdot\sin\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{x}{y}}.$$

Also

$$f'(x,y) = \Big(f_x(x,y),\ f_y(x,y)\Big) = \Big(\frac{1}{y\cdot\sin\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{x}{y}},\ \frac{-x}{y^2\cdot\sin\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{x}{y}}\Big).$$

(c) Für $f(x,y) = \arctan\frac{x}{y}$ ist

$$f_x(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{und}$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot\Big(\frac{-x}{y^2}\Big) = -\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Folglich ist

$$f'(x,y) = \Big(\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{-x}{x^2+y^2}\Big).$$

(d) Für $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ist

$$f_x(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \ldots,\ f_z(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Also

$$f'(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot(x,y,z).$$