Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.8 Differentialrechnung (mehrere Veränderliche)

8.3 (a) Berechnen Sie die Gradienten von **12/8/3/1**

$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ und $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

(b) Bestimmen Sie für $f(x,y) = x^2 - y^2$ in den Punkten $(1,1)$ und $(-1,1)$ die Richtungsableitung in Richtung $\overline{a} = (r_1, r_2)$ und in Richtung $-\overline{a}$, wobei $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 8.3 (a) $\operatorname{grad} f(x,y,z) = -\left(\frac{1}{x^2}, \ldots, \frac{1}{z^2}\right)$. **12/8/3/2**

(b) $f_{\overline{a}}(1,1) = 0$; $f_{-\overline{a}}(1,1) = 0$; $f_{\overline{a}}(-1,1) = -2\sqrt{2}$; $f_{-\overline{a}}(-1,1) = 2\sqrt{2}$.

Lösung zu Aufgabe 8.3 **12/8/3/3**

(a) Für $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ist

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \ldots, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right).$$

Für $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ ist

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \left(\frac{-1}{x^2}, \frac{-1}{y^2}, \frac{-1}{z^2}\right) = -\left(\frac{1}{x^2}, \ldots, \frac{1}{z^2}\right).$$

(b) Für $\overline{a} = (r_1, r_2)$ mit $|\overline{a}| = 1$ und $\overline{c} = (c_1, c_2)$ ist die Richtungsableitung von f an der Stelle $\overline{c}$ gegeben durch $f_{\overline{a}}(\overline{c}) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\overline{c} + h\overline{a}) - f(\overline{c})}{h}$ (vgl. 8/1/7).

Folglich gilt für $f(x,y) = x^2 - y^2$:

$$f_{\overline{a}}(1,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+\frac{h}{2}\sqrt{2},\, 1+\frac{h}{2}\sqrt{2}) - f(1,1)}{h} = 0,$$

$$f_{-\overline{a}}(1,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1-\frac{h}{2}\sqrt{2},\, 1-\frac{h}{2}\sqrt{2}) - f(1,1)}{h} = 0,$$

$$f_{\overline{a}}(-1,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+\frac{h}{2}\sqrt{2},\, 1+\frac{h}{2}\sqrt{2}) - f(-1,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2h\sqrt{2}}{h} = -2\sqrt{2},$$

$$f_{-\overline{a}}(-1,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1-\frac{h}{2}\sqrt{2},\, 1-\frac{h}{2}\sqrt{2}) - f(-1,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h\sqrt{2}}{h} = 2\sqrt{2}.$$