

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.8 Differentialrechnung (mehrere Veränderliche)

8.4 Man berechne die Gleichung der Tangentialebene für

12/8/4/1

- (a) das Rotationsparaboloid $z = x^2 + y^2$,
- (b) die Halbkugel $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$,
- (c) die Sattelfläche $z = x \cdot y$.

Lösung zu Aufgabe 8.4 Die Gleichung der Tangentialebene von f an einer Stelle $\bar{c} \in D(f)$ ist gegeben durch

12/8/4/3

$$t(\bar{x}) = f(\bar{c}) + f'(\bar{c}) \cdot (\bar{x} - \bar{c}).$$

Im Folgenden sei $\bar{x} = (x, y)$ und $\bar{c} = (a, b) \in D(f)$.

- (a) Für $f(\bar{x}) = x^2 + y^2$ ist $f_x(\bar{c}) = 2a$ und $f_y(\bar{c}) = 2b$, also

$$t(\bar{x}) = a^2 + b^2 + 2a(x - a) + 2b(y - b).$$

- (b) Für $f(\bar{x}) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ ist $f_x(\bar{c}) = -\frac{-a}{\sqrt{r^2 - a^2 - b^2}}$ und $f_y(\bar{c}) = -\frac{-b}{\sqrt{r^2 - a^2 - b^2}}$.

Folglich ist

$$t(\bar{x}) = \sqrt{r^2 - a^2 - b^2} - \frac{a(x - a)}{\sqrt{r^2 - a^2 - b^2}} - \frac{b(y - b)}{\sqrt{r^2 - a^2 - b^2}}.$$

- (c) Für $f(\bar{x}) = xy$ ist $f_x(\bar{c}) = b$ und $f_y(\bar{c}) = a$, also

$$t(\bar{x}) = ab + b(x - a) + a(y - b).$$