Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.8 Differentialrechnung (mehrere Veränderliche)

8.4 Man berechne die Gleichung der Tangentialebene für **12/8/4/1**

(a) das Rotationsparaboloid $z = x^2 + y^2$,

(b) die Halbkugel $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$,

(c) die Sattelfläche $z = x \cdot y$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 8.4 (a) $t(\overline{x}) = a^2 + b^2 + 2a(x-a) + 2b(y-b)$. **12/8/4/2**

(b) $t(\overline{x}) = \sqrt{r^2 - a^2 - b^2} - \frac{a(x-a)}{\sqrt{r^2 - a^2 - b^2}} - \frac{b(y-b)}{\sqrt{r^2 - a^2 - b^2}}$.

(c) $t(\overline{x}) = ab + b(x-a) + a(y-b)$.

Lösung zu Aufgabe 8.4 Die Gleichung der Tangentialebene von f an einer Stelle $\overline{c} \in D(f)$ ist gegeben durch **12/8/4/3**

$$t(\overline{x}) = f(\overline{c}) + f'(\overline{c}) \cdot (\overline{x} - \overline{c}).$$

Im Folgenden sei $\overline{x} = (x, y)$ und $\overline{c} = (a, b) \in D(f)$.

(a) Für $f(\overline{x}) = x^2 + y^2$ ist $f_x(\overline{c}) = 2a$ und $f_x(\overline{c}) = 2b$, also

$$t(\overline{x}) = a^2 + b^2 + 2a(x-a) + 2b(y-b).$$

(b) Für $f(\overline{x}) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ ist $f_x(\overline{c}) = -\frac{-a}{\sqrt{r^2 - a^2 - b^2}}$ und $f_x(\overline{c}) = -\frac{-b}{\sqrt{r^2 - a^2 - b^2}}$.
Folglich ist

$$t(\overline{x}) = \sqrt{r^2 - a^2 - b^2} - \frac{a(x-a)}{\sqrt{r^2 - a^2 - b^2}} - \frac{b(y-b)}{\sqrt{r^2 - a^2 - b^2}}.$$

(c) Für $f(\overline{x}) = xy$ ist $f_x(\overline{c}) = b$ und $f_y(\overline{c}) = a$, also

$$t(\overline{x}) = ab + b(x-a) + a(y-b).$$