Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.8 Differentialrechnung (mehrere Veränderliche)

8.5 (a) Für $f(x, y, z) = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ beweise man, daß **12/8/5/1**

$$f_x + f_y + f_z = \frac{3}{x + y + z}.$$

(b) Für $f(x, y, z) = \dfrac{4\pi a^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ beweise man, daß $\Delta f := f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$.

Lösung zu Aufgabe 8.5 Sei $\overline{x} = (x, y, z)$. **12/8/5/3**

(a) Für $f(\overline{x}) = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ ist

$$f_x(\overline{x}) = \frac{1}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \cdot (3x^2 - 3yz),$$
$$f_y(\overline{x}) = \frac{1}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \cdot (3y^2 - 3xz),$$
$$f_z(\overline{x}) = \frac{1}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \cdot (3z^2 - 3xy).$$

Folglich ist

$$f_x(\overline{x}) + f_y(\overline{y}) + f_z(\overline{z}) = \frac{3}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

Wegen

$$(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \cdot (x + y + z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

ist

$$f_x(\overline{x}) + f_y(\overline{y}) + f_z(\overline{z}) = \frac{3}{x + y + z}.$$

(b) Sei $g(\overline{x}) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$. Dann ist

$$g_x(\overline{x}) = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}},$$
$$g_y(\overline{y}) = -y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}},$$
$$g_z(\overline{z}) = -z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

und somit

$$\begin{aligned} g_{xx}(\overline{x}) &= -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \\ &= (3x^2 - x^2 - y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$g_{yy}(\overline{x}) = (3y^2 - x^2 - y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \quad \text{und}$$
$$g_{zz}(\overline{x}) = (3z^2 - x^2 - y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \Delta f := f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} &= 4\pi a^3 (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} (3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$