

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.8 Differentialrechnung (mehrere Veränderliche)

- 8.6** (a) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(x, y) = e^x \sin y$ im Punkt (a, b) in beiden Richtungen der Geraden $y - b = (a - x) \cdot \tan b$. 12/8/6/1
- (b) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ in den Punkten $(1, 1)$ und $(-1, -1)$ in Richtung der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.

Lösung zu Aufgabe 8.6 Für $\bar{c} = (a, b)$ und $\bar{r} = (r_1, r_2)$ ist $f_{\bar{r}} = f'(\bar{c}) \cdot \bar{r}$ (vgl. 8/1/25). 12/8/6/3

- (a) Es ist $f'(\bar{c}) = (e^a \cdot \sin b, e^a \cdot \cos b)$ und somit

$$f_{\bar{r}}(\bar{c}) = e^a \sin b \cdot r_1 + e^a \cos b \cdot r_2.$$

Durch $y = b + (a - x) \cdot \tan b$ ist eine Gerade gegeben. Wir betrachten die Stellen $x_1 := a + 1$ bzw. $x_2 := a - 1$. Dann ist

$$y_1 = b + (a - x_1) \cdot \tan b = b - \tan b \quad \text{und}$$

$$y_2 = b + (a - x_2) \cdot \tan b = b + \tan b.$$

Durch $\bar{c}_1 = (x_1, y_1) - (a, b) = (1, -\tan b)$ und $\bar{c}_2 = (x_2, y_2) - (a, b) = (-1, \tan b)$ sind die Richtungen gegeben. Weiterhin ist

$$|\bar{c}_i| = \sqrt{1 + \tan^2 b} = \frac{1}{|\cos b|} \quad \text{für } i = 1, 2,$$

also $|\bar{r}_i| = 1$ mit $\bar{r}_i = \frac{\bar{c}_i}{|\bar{c}_i|}$.

1. Fall: $\tan b = 0 \implies \sin b = 0$ und $\bar{r}_i = (\pm 1, 0)$. Folglich ist $f_{\bar{r}_i}(\bar{c}) = 0$.

2. Fall: $\tan b \neq 0$. Für $\cos b > 0$ ist $\bar{r}_1 = (\cos b, -\sin b)$, für $\cos b < 0$ ist $\bar{r}_2 = (\cos b, -\sin b)$, und somit

$$f_{\bar{r}_i}(\bar{c}) = e^a \sin b \cdot \cos b + e^a \cos b \cdot (-\sin b) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2.$$

- (b) Sei $\bar{r} = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$. Dann ist

$$f_{\bar{r}}(1, 1) = (2, -2) \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}) = 0 \quad \text{und}$$

$$f_{\bar{r}}(-1, -1) = (-2, 2) \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}) = 0.$$