Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.8 Differentialrechnung (mehrere Veränderliche)

8.6 (a) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y$ im Punkt (a,b) in beiden Richtungen der Geraden $y - b = (a-x)\cdot\tan b$. **12/8/6/1**

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(x,y) = x^2 - y^2$ in den Punkten $(1,1)$ und $(-1,-1)$ in Richtung der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.

Lösungshinweis zu Aufgabe 8.6 Für $\overline{c} := (a,b)$ und $\overline{r} := (r_1, r_2)$ mit $|\overline{r}| = 1$ gilt: **12/8/6/2**

(a) $f'(\overline{c}) = (\mathrm{e}^a \cdot \sin b,\, \mathrm{e}^a \cdot \cos b)$. Speziell für die durch $\overline{c}_1 := (1, -\tan b)$ bzw. $\overline{c}_2 := (-1, \tan b)$ gegebenen Richtungen ist dann

$f_{\overline{r}_i}(\overline{c}) = \mathrm{e}^a \sin b \cdot \cos b + \mathrm{e}^a \cos b \cdot (-\sin b) = 0$ für $i = 1,2$, wobei $\overline{r}_i = \frac{\overline{c}_i}{|\overline{c}_i|}$.

(b) Für $\overline{r} = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ ist $f_{\overline{r}}(1,1) = 0$ und $f_{\overline{r}}(-1,-1) = 0$.

Lösung zu Aufgabe 8.6 Für $\overline{c} = (a,b)$ und $\overline{r} = (r_1, r_2)$ ist $f_{\overline{r}} = f'(\overline{c})\cdot\overline{r}$ (vgl. 8/1/25). **12/8/6/3**

(a) Es ist $f'(\overline{c}) = (\mathrm{e}^a \cdot \sin b,\, \mathrm{e}^a \cdot \cos b)$ und somit

$$f_{\overline{r}}(\overline{c}) = \mathrm{e}^a \sin b \cdot r_1 + \mathrm{e}^a \cos b \cdot r_2.$$

Durch $y = b + (a-x)\cdot\tan b$ ist eine Gerade gegeben. Wir betrachten die Stellen $x_1 := a+1$ bzw. $x_2 := a-1$. Dann ist

$$y_1 = b + (a - x_1)\cdot\tan b = b - \tan b \quad \text{und}$$
$$y_2 = b + (a - x_2)\cdot\tan b = b + \tan b.$$

Durch $\overline{c}_1 = (x_1, y_1) - (a,b) = (1, -\tan b)$ und $\overline{c}_2 = (x_2, y_2) - (a,b) = (-1, \tan b)$ sind die Richtungen gegeben. Weiterhin ist

$$|\overline{c}_i| = \sqrt{1 + \tan^2 b} = \frac{1}{|\cos b|} \quad \text{für } i = 1,2,$$

also $|\overline{r}_i| = 1$ mit $\overline{r}_i = \frac{\overline{c}_i}{|\overline{c}_i|}$.

1. Fall: $\tan b = 0 \Longrightarrow \sin b = 0$ und $\overline{r}_i = (\pm 1, 0)$. Folglich ist $f_{\overline{r}_i}(\overline{c}) = 0$.

2. Fall: $\tan b \neq 0$. Für $\cos b > 0$ ist $\overline{r}_1 = (\cos b, -\sin b)$, für $\cos b < 0$ ist $\overline{r}_2 = (\cos b, -\sin b)$, und somit

$$f_{\overline{r}_i}(\overline{c}) = \mathrm{e}^a \sin b \cdot \cos b + \mathrm{e}^a \cos b \cdot (-\sin b) = 0 \quad \text{für } i = 1,2.$$

(b) Sei $\overline{r} = (\frac{1}{2}\sqrt{2},\, \frac{1}{2}\sqrt{2})$. Dann ist

$$f_{\overline{r}}(1,1) = (2,-2)\cdot(\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = 0 \quad \text{und}$$
$$f_{\overline{r}}(-1,-1) = (-2,2)\cdot(\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = 0.$$