

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.8 Differentialrechnung (mehrere Veränderliche)

8.7 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \frac{1}{xy}$. 12/8/7/1

(a) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene für f an der Stelle $(1, 1)$ an.

(b) Es sei $M = \{(x, y) : |x - 1| < \frac{1}{10}, |y - 1| < \frac{1}{10}\}$.

Wie groß ist die Abweichung zwischen f und der Tangentialebene in M (möglichst genau angeben)?

Lösung zu Aufgabe 8.7

12/8/7/3

(a) Es ist $f_x(x, y) = -\frac{1}{x^2y}$, $f_y(x, y) = -\frac{1}{xy^2}$ und somit

$$\begin{aligned} t(x, y) &= f(1, 1) + f'(1, 1) \cdot (x - 1, y - 1) \\ &= 1 + (-1, -1) \cdot (x - 1, y - 1) = 3 - x - y. \end{aligned}$$

(b) Es ist $|x - 1| < \frac{1}{10} \iff \frac{9}{10} < x < \frac{11}{10}$ und $|y - 1| < \frac{1}{10} \iff \frac{9}{10} < y < \frac{11}{10}$.

Sei $x := 1 + u$ und $y := 1 + v$ mit $|u|, |v| < \frac{1}{10}$. Dann ist

$$\begin{aligned} |f(x, y) - t(x, y)| &= \left| \frac{1}{xy} - 3 + x + y \right| \\ &= \left| \frac{1}{(1+u)(1+v)} + u + v - 1 \right| \\ &= \left| \frac{1 + u + u^2 + uv + u^2v + v + uv + v^2 + uv^2}{(1+u)(1+v)} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{u^2 + u^2v + uv + v^2 + uv^2}{(1+u)(1+v)} \right| \\ &\leq \frac{\frac{3}{100} + \frac{2}{1000}}{\left(\frac{9}{10}\right)^2} = \frac{16}{405}. \end{aligned}$$