

## Kapitel 12 Aufgabensammlung

### 12.8 Differentialrechnung (mehrere Veränderliche)

8.7 Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ . 12/8/7/1

(a) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene für  $f$  an der Stelle  $(1, 1)$  an.

(b) Es sei  $M = \{(x, y) : |x - 1| < \frac{1}{10}, |y - 1| < \frac{1}{10}\}$ .

Wie groß ist die Abweichung zwischen  $f$  und der Tangentialebene in  $M$  (möglichst genau angeben)?

**Lösungshinweis zu Aufgabe 8.7** (a)  $t(x, y) = 1 + (-1, -1) \cdot (x - 1, y - 1) = 3 - x - y$ . 12/8/7/2

(b)  $|f(x, y) - t(x, y)| = \left| \frac{1}{xy} - 3 + x + y \right| \leq \frac{16}{405}$ .

#### Lösung zu Aufgabe 8.7

12/8/7/3

(a) Es ist  $f_x(x, y) = -\frac{1}{x^2y}$ ,  $f_y(x, y) = -\frac{1}{xy^2}$  und somit

$$\begin{aligned} t(x, y) &= f(1, 1) + f'(1, 1) \cdot (x - 1, y - 1) \\ &= 1 + (-1, -1) \cdot (x - 1, y - 1) = 3 - x - y. \end{aligned}$$

(b) Es ist  $|x - 1| < \frac{1}{10} \iff \frac{9}{10} < x < \frac{11}{10}$  und  $|y - 1| < \frac{1}{10} \iff \frac{9}{10} < y < \frac{11}{10}$ .

Sei  $x := 1 + u$  und  $y := 1 + v$  mit  $|u|, |v| < \frac{1}{10}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} |f(x, y) - t(x, y)| &= \left| \frac{1}{xy} - 3 + x + y \right| \\ &= \left| \frac{1}{(1+u)(1+v)} + u + v - 1 \right| \\ &= \left| \frac{1+u+u^2+uv+u^2v+v+uv+v^2+uv^2}{(1+u)(1+v)} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{u^2+u^2v+uv+v^2+uv^2}{(1+u)(1+v)} \right| \\ &\leq \frac{\frac{3}{100} + \frac{2}{1000}}{\left(\frac{9}{10}\right)^2} = \frac{16}{405}. \end{aligned}$$