Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.8 Differentialrechnung (mehrere Veränderliche)

8.9 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$ **12/8/9/1**

Bilden Sie (falls existent) alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von f.
Was läßt sich über die gemischten Ableitungen aussagen?
Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Inhalt des Satzes von Schwarz.

Lösungshinweis zu Aufgabe 8.9 Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt: **12/8/9/2**

$$f_x(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \cdot (x^4y + 4x^2y^3 - y^5),$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^3} \cdot (-4x^3y^3 + 12xy^5),$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^3} \cdot (x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6),$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \cdot (x^5 - 4x^3y^2 - xy^4),$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^3} \cdot (-12x^5y + 4x^3y^3),$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^3} \cdot (x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6).$$

Die gemischten Ableitungen stimmen überein; da f_x, f_y, f_{xy} existieren und f_{xy} stetig ist, folgt dies schon aus dem Satz von Schwarz.

Für $x = y = 0$ ist

$f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$ und $f_{xx}(0,0) = 0 = f_{yy}(0,0)$.

Weiterhin gilt:

$f_{xy}(0,0) = -1$ und $f_{yx}(0,0) = 1$.

Die gemischten Ableitungen stimmen nicht überein. Da f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} existieren, sind f_{xy} und f_{yx} in $(0,0)$ nicht stetig.